មេរៀនទី១: សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១

ដំណោះស្រាយលំហាត់

១. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក. $y' = 2x^2 - x + 1$

ខ. $y' = e^{-2x}$

គ. $y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$

ឃ. $y' = \dfrac{x}{x^2-1}$ កំណត់លើ $(-1,1)$

ង. $xy' = 1$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y' = 2x^2 - x + 1$ គេបាន $\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 - x + 1$, $dy = (2x^2 - x + 1)dx$

$\int dy = \int (2x^2 - x + 1)dx$, $y = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x + c$,(c ថេរ)

ដូចនេះ $y = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x + c$, (c ថេរ) ។

ខ. $y' = e^{-2x}$ គេបាន $\dfrac{dy}{dx} = e^{-2x}$, $dy = e^{-2x}dx$, $\int dy = \int e^{-2x}dx$

នោះ $y = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} + c$, (c ថេរ)

ដូចនេះ $y = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} + c$, (c ថេរ) ។

គ. $y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$ គេបាន $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $dy = \dfrac{2x}{x^2+1}dx$

$\int dy = \int \dfrac{2x}{x^2+1}dx$ នោះ $y = \ln|x^2+1| + c$, (c ថេរ)

ដូចនេះ $y = \ln|x^2+1| + c$, (c ថេរ) ។

ឃ. $y' = \dfrac{x}{x^2-1}$ កំណត់លើ $(-1,1)$ គេបាន $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2-1}$, $dy = \dfrac{x}{x^2-1}dx$

$\int dy = \int \dfrac{x}{x^2-1}dx$ នោះគេបាន $y = \dfrac{1}{2}\ln|x^2-1| + c$, (c ថេរ)

ដូចនេះ $y = \dfrac{1}{2}\ln|x^2-1| + c$, (c ថេរ) ។

ង. $xy'=1$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ គេបាន $y'=\frac{1}{x}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$

$dy=\frac{1}{x}dx$, $\int dy=\int\frac{1}{x}dx$ នោះ $y=\ln|x|+c$, (c ថេរ)

ដូចនេះ $y=\ln|x|+c$, (c ថេរ) ។

២. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខ័ណ្ឌដែលឲ្យ

ក. $\frac{y'}{y}=\cos x$, $y(\frac{\pi}{2})=e$ *ខ.* $y'=e^{2x}$, $y(0)=5$

គ. $(3x^2-2)y'=6x$, $y(1)=4$ *ឃ.* $\frac{y'}{\tan x}=1$, $y(0)=0$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\frac{y'}{y}=\cos x$, $y(\frac{\pi}{2})=e$ គេបាន $y'=y\cos x$, $\frac{dy}{dx}=y\cos x$

$\frac{dy}{y}=\cos xdx$, $\ln|y|=\sin x+k$ ដែល k ថេរ

នោះ $y=\pm e^{\sin x+k}=c.e^{\sin x}$ (c ថេរ)

ដោយ $y(\frac{\pi}{2})=e$ នោះ $e=c.e^{\sin\frac{\pi}{2}}$, $c=1$

ដូចនេះ $y=e^{\sin x}$ ។

ខ. $y'=e^{2x}$, $y(0)=5$ គេបាន $\frac{dy}{dx}=e^{2x}$, $dy=e^{2x}dx$

$\int dy=\int e^{2x}dx$, $y=\frac{1}{2}e^{2x}+c$, (c ថេរ)

ដោយ $y(0)=5$ នោះគេបាន $\frac{1}{2}e^{2(0)}+c=5$, $c=\frac{9}{2}$

ដូចនេះ $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{9}{2}$ ។

គ. $(3x^2-2)y'=6x$, $y(1)=4$

នោះ $y'=\frac{6x}{3x^2-2}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{6x}{3x^2-2}$, $dy=\frac{6x}{3x^2-2}dx$, $\int dy=\int\frac{6x}{3x^2-2}$

$y=\ln|3x^2-2|+c$ (c ថេរ)

ដោយ $y(1)=4$ នោះ $\ln|3\times1-2|+c=4$, $c=4$

ដូចនេះ $y=\ln|3x^2-2|+4$

ឃ . $\frac{y'}{\tan x}=1$, $y(0)=0$

គេបាន $y'=\tan x$, $\frac{dy}{dx}=\tan x$, $dy=\tan x dx$, $\int dy=\int \tan x dx$

$y=-\ln|\cos x|+c$ (c ថេរ)

ដោយ $y(0)=0$ នោះ $-\ln|\cos 0|+c=0$, $c=0$

ដូចនេះ $y=-\ln|\cos x|$

៣. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ ១

ក. $\frac{dy}{dx}+2y=0$ *ខ.* $3\frac{dy}{dx}+y=0$

គ. $2y'-3y=0$ *ឃ.* $y'+y\sqrt{2}=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $\frac{dy}{dx}+2y=0$

គេបាន $\frac{dy}{dx}=-2y$, $\frac{dy}{y}=-2dx$, $\int\frac{dy}{y}=\int -2dx$

$\ln|y|=-2x+k$ (k ថេរ) នោះ $y=\pm e^{-2x+k}=c.e^{-2x}$ (យក $c=\pm e^k$)

ដូចនេះ $y=c.e^{-2x}$ (c ថេរ) ។

ខ. $3\frac{dy}{dx}+y=0$

គេបាន $3\frac{dy}{dx}=-y$, $\frac{dy}{y}=-3dx$, $\int\frac{dy}{y}=\int -3dx$

$\ln|y|=-3x+k$ (k ថេរ) , $y=\pm e^{-3x+k}=c.e^{-3x}$ (យក $c=\pm e^k$)

ដូចនេះ $y=c.e^{-3x}$ (c ថេរ) ។

គ. $2y'-3y=0$

គេបាន $2\frac{dy}{dx}=3y$, $\frac{dy}{y}=\frac{2}{3}dx$, $\ln|y|=\frac{2}{3}x+k$ (k ថេរ)

$y=\pm e^{\frac{2}{3}x+k}=c.e^{\frac{2}{3}x}$ (យក $c=\pm e^k$)

ដូចនេះ $y=c.e^{\frac{2}{3}x}$ (c ថេរ) ។

ឃ. $y'+y\sqrt{2}=0$

គេបាន $\frac{dy}{dx}=-\sqrt{2}y$, $\frac{dy}{y}=-\sqrt{2}dx$, $\int\frac{dy}{y}=\int-\sqrt{2}dx$

$\ln|y|=-\sqrt{2}x+k$ (k ថេរ) នោះ $y=\pm e^{-\sqrt{2}x+k}=c.e^{-\sqrt{2}x}$ (យក $c=\pm e^{k}$)

ដូចនេះ $y=c.e^{-\sqrt{2}x}$ (c ថេរ) ។

៩.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ ១ តាមលក្ខខ័ណ្ឌដែលឲ្យ

ក. $-y'+2y=0$, $y(3)=-2$ ***ខ.*** $2y'+y=0$, $y(\ln 4)=\frac{1}{5}$

គ. $7y'+4y=0$, $y(7)=e^{-4}$ ***ឃ.*** $2y'-5y=0$, $y(1)=-3$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $-y'+2y=0$, $y(3)=-2$

គេបាន $y'=2y$, $\frac{dy}{dx}=2y$, $\frac{dy}{y}=2dx$, $\int\frac{dy}{y}=\int 2dx$

$\ln|y|=2x+k$ (k ថេរ) នោះ $y=\pm e^{2x+k}=c.e^{2x}$ (យក $c=\pm e^{k}$)

ដោយ $y(3)=-2$ នោះ $c.e^{2(3)}=-2$, $c=-2e^{-6}$

គេបាន $y=-2e^{-6}.e^{2x}=-2e^{2x-6}$

ដូចនេះ $y=-2e^{2x-6}$ ។

ខ. $2y'+y=0$, $y(\ln 4)=\frac{1}{5}$

គេបាន $2y'=-y$, $2\frac{dy}{dx}=-y$, $\frac{dy}{y}=-\frac{1}{2}dx$

$\int\frac{dy}{y}=\int-\frac{1}{2}dx$, $\ln|y|=-\frac{1}{2}x+k$ (k ថេរ) នោះ $y=\pm e^{-\frac{1}{2}x+k}=c.e^{-\frac{1}{2}x}$ (យក $c=\pm e^{k}$)

ដោយ $y(\ln 4)=\frac{1}{5}$ នោះ $c.e^{-\frac{1}{2}(\ln 4)}=\frac{1}{5}$, $c=\frac{2}{5}$

ដូចនេះ $y=\frac{2}{5}e^{-\frac{1}{2}x}$

គ. $7y'+4y=0$, $y(7)=e^{-4}$

គេបាន $7y'=-4y$, $7\frac{dy}{dx}=-4y$, $\frac{dy}{y}=-\frac{4}{7}dx$

$\ln|y|=-\frac{4}{7}x+k$ (k ថេរ) នោះ $y=\pm e^{-\frac{4}{7}x+k}=c.e^{-\frac{4}{7}x}$ (យក $c=\pm e^{k}$)

ដោយ $y(7)=e^{-4}$ នោះ $c.e^{-\frac{4}{7}(7)}=e^{-4}$, $c=1$

ដូចនេះ $y=e^{-\frac{4}{7}x}$ ។

ឃ. $2y'-5y=0$, $y(1)=-3$

គេបាន $2y'=5y$, $2\dfrac{dy}{dx}=5y$, $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{5}{2}dx$, $\int\dfrac{dy}{y}=\int\dfrac{5}{2}dx$

$\ln|y|=\dfrac{5}{2}x+k$ (k ថេរ) នោះ $y=\pm e^{\frac{5}{2}x+k}=c.e^{\frac{5}{2}x}$ (យក $c=\pm e^{k}$)

ដោយ $y(1)=3$ នោះ $c.e^{\frac{5}{2}(1)}=3$, $c=-3e^{-\frac{5}{2}}$

ដូចនេះ $y=-3e^{\frac{5}{2}(x-1)}$ ។

៥. ចូរបង្ហាញថា អនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោមនេះ ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល នៅខាងស្តាំ

ក. $y=x+e^{x}$, $y'-y=1-x$

ខ. $y=e^{3x}-x-1$, $y'-3y=3x+2$

គ. $y=\sin x+\cos x$, $y'+y=2\cos x$

ឃ. $y=x+\ln x$, $xy'-y=1-\ln x$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y=x+e^{x}$, $y'-y=1-x$ (1)

គេបាន $y'=1+e^{x}$ នោះ(1) ទៅជា $1+e^{x}-(x+e^{x})=1-x$

$1+e^{x}-x-e^{x}=1-x$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $y=x+e^{x}$ ជាចម្លើយនៃ $y'-y=1-x$ ។

ខ. $y=e^{3x}-x-1$, $y'-3y=3x+2$ (2)

គេបាន $y'=3e^{3x}-1$ នោះ(2) ទៅជា $3e^{3x}-1-3(e^{3x}-x-1)=3x+2$

$3e^{3x}-1-3e^{3x}+3x+3=3x+2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $y=e^{3x}-x-1$ ជាចម្លើយនៃ $y'-3y=3x+2$ ។

គ. $y=\sin x+\cos x$, $y'+y=2\cos x$ (3)

គេបាន $y'=\cos x-\sin x$ នោះ(3) ទៅជា $\cos x-\sin x+\sin x+\cos x=2\cos x$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $y=\sin x+\cos x$ ជាចម្លើយនៃ $y'+y=2\cos x$ ។

ឃ. $y = x+\ln x$, $xy'-y=1-\ln x$ (4)

គេបាន $y'=1+\frac{1}{x}$ នោះ(4) ទៅជា $x(1+\frac{1}{x})-(x+\ln x)=1-\ln x$

$x+1-x-\ln x=1-\ln x$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $y=x+\ln x$ ជាចម្លើយនៃ $xy'-y=1-\ln x$ ។

៦. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ៖ $y'+2y=x^2$

ក. កំណត់ពហុធា g មានដឺក្រេទី 2 ដែលជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

ខ. តាង h ជាអនុគមន៍ដែល $h(x)=f(x)-g(x)$ ។ បើ h ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'+2y=0$ នោះបង្ហាញថា f ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $y'+2y=0$ រួចទាញរកអនុគមន៍ f ដែលជាចម្លើយទូទៅនៃ (E)។

ដំណោះស្រាយ

ក. តាង $g(x)=ax^2+bx+c$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) នោះគេបាន

$g'(x)=2ax+b$ នោះ (E) ទៅជា $2ax+b+2ax^2+2bx+2c=x^2$

$2ax^2+(2a+2b)x+b+2c=x^2$ គេបាន $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{4}, c=\frac{1}{4}$

ដូចនេះ $g(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ(E) ។

ខ. គេមាន $h(x)=f(x)-g(x)$ នោះ $f(x)=h(x)+g(x)$

ដោយ $h(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $y'+2y=0$ នោះ $h'(x)+2h(x)=0$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $g(x)$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) នោះ $g'(x)+2g(x)=x^2$ (2)

បូក(1)និង(2) គេបាន $h'(x)+g'(x)+2h(x)+2g(x)=x^2$

$[h(x)+g(x)]'+2[h(x)+g(x)]=x^2$ ឬ $f'(x)+2f(x)=x^2$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $y'+2y=0$ រួចទាញរកអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលជាចម្លើយទូទៅនៃ (E)

គេបាន $y'+2y=0$ នោះ $\frac{dy}{dx}=-2y$, $\frac{dy}{y}=-2dx$, $\ln|y|=-2x+k$ (k ថេរ)

$y=\pm e^{-2x+k}=c.e^{-2x}$ (យក $c=\pm e^{k}$)

នោះគេបាន $f(x)=h(x)+g(x)=\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+c.e^{-2x}$

ដូចនេះ $f(x)=\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+c.e^{-2x}$ (c ថេរ) ។

៧. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'-2y=\frac{-2}{1+e^{-2x}}$

ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'-2y=0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $y(0)=1$ ។

ខ. តាង f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលើ IR ដែល $f(x)=e^{2x}g(x)$ ។ គណនា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ $g(x)$ និង $g'(x)$ ។

គ. បង្ហាញថាបើ f ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $g'(x)=\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ ។

ឃ. ទាញរកកន្សោម $g(x)$ រួច $f(x)$ ដែល f ជាចម្លើយនៃ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គេបាន $y'-2y=0$, $y'=2y$, $\frac{dy}{y}=2dx$

$\ln|y|=2x+k$ (k ថេរ) នោះ $y=\pm e^{2x+k}=c.e^{2x}$ (យក $c=\pm e^{k}$)

ដោយ $y(0)=1$ នោះ $c=1$

ដូចនេះ $y=e^{2x}$ ។

ខ. គណនា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ $g(x)$ និង $g'(x)$

គេមាន $f(x)=e^{2x}g(x)$ នោះ $f'(x)=2e^{2x}g(x)+e^{2x}g'(x)$

ដូចនេះ $f'(x)=2e^{2x}g(x)+e^{2x}g'(x)$

គ. បង្ហាញថា $g'(x)=\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

ដោយ f ជាចម្លើយនៃ $(E): y'-2y=\frac{-2}{\ }$ ហើយ $f(x)=e^{2x}g(x)$

គេបាន $f'(x)=2e^{2x}g(x)+e^{2x}g'(x)$ នោះសមីការ (E) ទៅជា

$2e^{2x}g(x)+e^{2x}g'(x)-2e^{2x}g(x)=\frac{-2}{1+e^{-2x}}$

ដូចនេះ $g'(x)=\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ ។

បង្ហាញថា f ជាចម្លើយនៃ (E) $: v'-2v=\dfrac{-2}{}$

គេមាន $g'(x)=\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ នោះ $g(x)=\ln(1+e^{-2x})+c$ (c ថេរ) (1)

និង $f(x)=e^{2x}[\ln(1+e^{-2x})+c]$ (2)

គេបាន $f'(x)=2e^{2x}\ln(1+e^{-2x})+e^{2x}\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}+2c.e^{2x}$

$$=2e^{2x}[\ln(1+e^{-2x})+c]-\frac{2}{1+e^{-2x}}$$ នោះ

$$y'-2y=2e^{2x}[\ln(1+e^{-2x})+c]-\frac{2}{1+e^{-2x}}-2e^{2x}[\ln(1+e^{-2x})+c]=-\frac{2}{1+e^{-2x}}$$

សរុបមក f ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $g'(x)=\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ ។

ឃ. តាម (1) $g(x)=\ln(1+e^{-2x})+c$ (c ថេរ)

តាម (2) $f(x)=e^{2x}g(x)=e^{2x}[\ln(1+e^{-2x})+c]$ (c ថេរ)។

៨.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក. $\dfrac{dy}{dx}-y=e^{3x}$ *ខ.* $\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{1}{1+e^{2x}}$

គ. $y'+y=1$ *ឃ.* $y'+y=\sin x$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $\dfrac{dy}{dx}-y=e^{3x}$ (E)

សមីការអូម៉ូសែនគឺ $\dfrac{dy}{dx}-y=0$ គេបាន $\dfrac{dy}{y}=dx$, $y=\pm e^{x+k}$ (k ថេរ)

យក $c=\pm e^{k}$ នោះ $y=c.e^{x}$ (c ថេរ)

(E) មានចម្លើយទូទៅរាង $f(x)=e^{x}g(x)$ នោះ $f'(x)=e^{x}g(x)+e^{x}g'(x)$ គេបាន

(E): $e^{x}g(x)+e^{x}g'(x)-e^{x}g(x)=e^{3x}$, $g'(x)=e^{2x}$ នោះ $g(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+k'$ (k' ថេរ)

ដូចនេះ $f(x)=e^{x}(\frac{1}{2}e^{2x}+k')$ (k' ថេរ) ។

ខ. $\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{1+e^{2x}}$ (E)

សមីការអូម៉ូសែនគឺ $\frac{dy}{dx}+y=0$ គេបាន $\frac{dy}{y}=-dx$, $\ln|y|=-x+k$ (k ថេរ)

$y=\pm e^{-x+k}=c'.e^{-x}$ (យក $c'=\pm e^{k}$ ថេរ)

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) រាង $f(x)=e^{-x}g(x)$ នោះ $f'(x)=-e^{-x}g(x)+e^{-x}g'(x)$ គេបាន

(E): $-e^{-x}g(x)+e^{-x}g'(x)+e^{-x}g(x)=\frac{1}{1+e^{2x}}$ ឬ $e^{-x}g'(x)=\frac{1}{1+e^{2x}}$

$g'(x)=\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}$ នោះ $g(x)=\int\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}dx=Arc\tan(e^{x})+c$

ដូចនេះ $f(x)=e^{-x}[Arc\tan(e^{x})+c]$ (c ថេរ) ។

គ. $y'+y=1$ (E)

សមីការអូម៉ូសែនរាង $y'+y=0$ គេបាន $y=c'.e^{-x}$ (c' ថេរ) (តាម ***ខ.***)

ចម្លើយទូទៅរាង $f(x)=e^{-x}g(x)$ នោះ $f'(x)=e^{-x}g'(x)-e^{-x}g(x)$ គេបាន

(E): $e^{-x}g'(x)-e^{-x}g(x)+e^{-x}g(x)=1$ ឬ $e^{-x}g'(x)=1$, $g'(x)=e^{x}$

នោះ $g(x)=e^{x}+c$ (c ថេរ)

ដូចនេះ $f(x)=e^{-x}(e^{x}+c)$ (c ថេរ) ។

ឃ. $y'+y=\sin x$ (E)

តាម (ខ.) $y=c'.e^{-x}$ (c' ថេរ)

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) រាង $f(x)=e^{-x}g(x)$ នោះ $f'(x)=-e^{-x}g(x)+e^{-x}g'(x)$ គេបាន

(E): $-e^{-x}g(x)+e^{-x}g'(x)+e^{-x}g(x)=\sin x$ ឬ $g'(x)=e^{x}\sin x$

គេបាន $g(x)=\int e^{x}\sin x dx=\frac{e^{x}}{2}(\sin x-\cos x)+c$ (c ថេរ)

ដូចនេះ $f(x)=e^{-x}[\frac{e^{x}}{2}(\sin x-\cos x)+c]$ (c ថេរ) ។

៩. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខ័ណ្ឌដើម

ក. $y'-y=1\,,\ y(0)=1$ **ខ.** $y'+2y=1\,,\ y(0)=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $y'-y=1\,,\ y(0)=1\ \ (E)$

សមីការអូម៉ូសែនរាង $y'-y=0$ គេបាន $\dfrac{dy}{y}=dx\,,\ \ln|y|=x+k$ (k ថេរ)

$y=\pm e^{x+k}=c'.e^{x}$ (យក $c'=\pm e^{k}$)

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) រាង $f(x)=e^{x}g(x)$ នោះ $f'(x)=e^{x}g(x)+e^{x}g'(x)$ គេបាន

$(E): e^{x}g(x)+e^{x}g'(x)-e^{x}g(x)=1$ ឬ $g'(x)=e^{-x}$

នោះ $g(x)=-e^{-x}+c$ (c ថេរ)

គេបាន $f(x)=e^{x}(-e^{-x}+c)=c.e^{x}-1$

តែ $f(0)=c-1=1$ នោះ $c=2$

ដូចនេះ $f(x)=2e^{x}-1$ ។

ខ. $y'+2y=1\,,\ y(0)=0\ \ (E)$

សមីការអូម៉ូសែនគឺ $y'+2y=0$ គេបាន $\dfrac{dy}{y}=-2dx\,,\ \ln|y|=-2x+c'$ (c' ថេរ)

$y=\pm e^{-2x+c'}=k.e^{-2x}$ (យក $k=\pm e^{c'}$)

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) រាង $f(x)=e^{-2x}g(x)$ នោះ $f'(x)=-2e^{-2x}g(x)+e^{-2x}g'(x)$

គេបាន $(E): -2e^{-2x}g(x)+e^{-2x}g'(x)+2e^{-2x}g(x)=1$ ឬ $g'(x)=e^{2x}$

នោះ $g(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+c$ (c ថេរ)

ដូចនេះ $f(x)=e^{-2x}(\dfrac{1}{2}e^{2x}+c)$ (c ថេរ) ។

១០. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក. $\dfrac{dy}{dx}=\sin 5x$ **ខ.** $dx+e^{3x}dy=0$ **គ.** $e^{x}\dfrac{dy}{dx}=2x$

ឃ. $(x+1)\dfrac{dy}{dx}=x+6$ **ង.** $\dfrac{dy}{dx}-y^{2}=-9$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $\frac{dy}{dx}=\sin 5x$ នោះគេបាន $dy=\sin 5x dx$, $\int dy=\int \sin 5x dx$

$y=-\frac{1}{5}\cos 5x+c$ (c ថេរ)

ដូចនេះ $y=-\frac{1}{5}\cos 5x+c$ (c ថេរ) ។

ខ. $dx+e^{3x}dy=0$ នោះគេបាន $dy=e^{-3x}dx$, $\int dy=\int e^{-3x}dx$

$y=-\frac{1}{3}e^{-3x}+c$ (c ថេរ)

ដូចនេះ $y=-\frac{1}{3}e^{-3x}+c$ (c ថេរ) ។

គ. $e^{x}\frac{dy}{dx}=2x$ គេបាន $dy=2xe^{-x}dx$, $\int dy=\int 2xe^{-x}dx$

$y=-2e^{-x}(x+1)+c$ (c ថេរ)

ដូចនេះ $y=-2e^{-x}(x+1)+c$ (c ថេរ) ។

ឃ. $(x+1)\frac{dy}{dx}=x+6$ គេបាន $dy=\frac{x+6}{x+1}dx$, $\int dy=\int \frac{x+6}{x+1}dx$

$y=x+5\ln|x+1|+c$ (c ថេរ)

ដូចនេះ $y=x+5\ln|x+1|+c$ (c ថេរ) ។

ង. $\frac{dy}{dx}-y^{2}=-9$ គេបាន $dy=(y^{2}-9)dx$, $\int \frac{dy}{y^{2}-9}=\int dx$

$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{y-3}{y+3}\right|=x+c$ (c ថេរ)

ដូចនេះ $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{y-3}{y+3}\right|=x+c$ (c ថេរ) ។

១១. គេដាក់ទឹក 100 លីត្រក្នុងធុងមួយ និងអំបិល $10kg$ ដែលត្រូវរលាយក្នុងធុងនោះ ។ ល្បាយអំបិលមួយដែលមានអំបិល $0.3kg$ ក្នុងទឹកមួយលីត្រត្រូវបង្ហូរចូលក្នុងធុងនេះដោយ

អត្រា 8 លីត្រក្នុងមួយនាទី ។ ល្បាយចម្រុះនៅក្នុងធុងត្រូវគេកូរ រួចបង្ហូរចេញដោយអត្រា 8 លីត្រក្នុងមួយនាទី ។

ក. រកលក្ខខ័ណ្ឌដើមនៃចំណោទ ដើម្បីគណនាបរិមាណអំបិល $Q(t)$ នៅក្នុងធុង ។

ខ. គណនាបរិមាណអំបិល $Q(t)$ ក្នុងធុង នៅខណៈ t គឺក្រោយពេលបង្ហូរបាន 25 នាទី ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកលក្ខខ័ណ្ឌដើមនៃចំណោទ

អំបិល $10kg$ ត្រូវរលាយក្នុងទឹក 100 លីត្រ នោះនៅខណៈ $t=0$ អំបិលមាន $10kg$

ដូចនេះ $Q_0 = Q(0) = 10$ ។

ខ. គណនាបរិមាណអំបិល $Q(t)$ ក្នុងធុង នៅខណៈ t គឺក្រោយពេលបង្ហូរបាន 25 នាទី

អត្រាបម្រែបម្រួលបរិមាណអំបិលនៅខណៈពេល t គឺ $\frac{dQ}{dt}$

គេបង្ហូរល្បាយអំបិលកំហាប់ $0.3kg$ ក្នុងមួយលីត្រ ដោយអត្រា 8 លីត្រក្នុងមួយនាទី

ចូលធុង គេបាន $\frac{dQ}{dt} = 0.3(8)$

ក្រោយមក គេបង្ហូរទឹកអំបិលចេញដោយអត្រា 8 លីត្រក្នុងមួយនាទី

គេបាន $\frac{dQ}{dt} = 0.3(8) - 8(\frac{Q}{100})$ ដែល $\frac{Q}{100}$: កំហាប់អំបិលក្នុងមួយលីត្រ

នោះគេបាន $\frac{dQ}{dt} + \frac{2}{25}Q = 2.4$ $(*)$

សមីការអូម៉ូសែនគឺ $\frac{dQ}{dt} + \frac{2}{25}Q = 0$ គេបាន $Q_c = c.e^{-\frac{2}{25}t}$, c ថេរ ។

ចម្លើយពិសេស គឺ $Q_p = a\,;\, a$ ថេរ នោះ $\frac{dQ}{dt} = 0$ គេបានសមីការទៅជា

$\frac{2}{25}a = 2.4$ ឬ $a = 30$

ដូចនេះ $Q_p = 30$ ។

គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $(*)$ គឺ $Q = Q_c + Q_p = c.e^{-\frac{2}{25}t} + 30$

តាមលក្ខខ័ណ្ឌដើម $Q(0) = 10$ នោះ $c + 30 = 10$, $c = -20$

គេបាន $Q(t) = -20.e^{-\frac{2}{25}t} + 30$ ។

ពេល $t = 25$ នោះ $Q(25) = -20.e^{-\frac{2}{25}(25)} + 30 \approx 27.293$

ដូចនេះ បរិមាណអំបិលក្រោយពេលបង្ហូរ 25 នាទីគឺ $27.293kg$ ។

មេរៀនទី២: សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២

ដំណោះស្រាយលំហាត់

1. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដែលគេឲ្យ ខាង ស្តាំ ៖

ក. $f(x)=(2x+1)e^{-x}\quad , y''+2y'+y=0$

ខ. $f(x)=e^{-x}\sin x\quad , y''+2y'+2y=0$

គ. $f(x)=Ae^{x}+Bxe^{x}\quad , y''-2y+y=0$ ដែល A និង B ជាចំនួនថេរ ណាមួយក៏បាន ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=(2x+1)e^{-x}\quad , y''+2y'+y=0$

គេបាន $f'(x)=2e^{-x}-(2x+1)e^{-x}$

$$f''(x)=-2e^{-x}-2e^{-x}+(2x+1)e^{-x}=-4e^{-x}+(2x+1)e^{-x}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f''(x)+2f'(x)+f(x)&=-4e^{-x}+(2x+1)e^{-x}+\\&+2(2e^{-x}-(2x+1)e^{-x})+(2x+1)e^{-x}\\&=-4e^{-x}+2(2x+1)e^{-x}+4e^{-x}-2(2x+1)e^{-x}\\&=0\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាចម្លើយនៃ } y''+2y'+y=0}$

ខ. $f(x)=e^{-x}\sin x\quad , y''+2y'+2y=0$

គេបាន $f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$

$$\begin{aligned}f''(x)&=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x\\&=-2e^{-x}\cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow f''(x)+2f'(x)+2f(x)&=-2e^{-x}\cos x-2e^{-x}\sin x+\\&+2e^{-x}\cos x+2e^{-x}\sin x\\&=0\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាចម្លើយនៃ } y''+2y'+2y=0}$ ។

គ. $f(x)=Ae^{x}+Bxe^{x}\quad , y''-2y+y=0$ ដែល A និង B ជាចំនួនថេរ ណាមួយក៏បាន

គេបាន $f'(x)=Ae^{x}+Be^{x}+Bxe^{x}=(A+B)e^{x}+Bxe^{x}$

$$f''(x)=(A+B)e^{x}+Be^{x}+Bxe^{x}=(A+2B)e^{x}+Bxe^{x}$$

$$\Rightarrow f''(x)-2f'(x)+f(x)=(A+2B)e^x+Bxe^x-2(A+B)e^x-2Bxe^x+$$
$$+Ae^x+Bxe^x$$
$$=0$$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាចម្លើយនៃ } y''-2y'+y=0}$

2. ដោះស្រាយសមីការ ៖

ក. $2y''-3y'+y=0$ *ខ.* $-4y''+7y'+2y=0$

គ. $y''-2y'=0$ *ឃ.* $y''-3y'+3y=0$

ង. $2y''+3y'-2y=0$ *ច.* $y''-3y'+y=0$

ដំណោះស្រាយ

ក. $2y''-3y'+y=0$

សមីការសម្គាល់គឺ $2\lambda^2-3\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda_1=1$, $\lambda_2=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅគឺ $\boxed{y=Ae^x+Be^{\frac{1}{2}x} \text{ ដែល } A, B \text{ ជាចំនួនថេរ}}$

ខ. $-4y''+7y'+2y=0$

សមីការសម្គាល់គឺ $-4\lambda^2+7\lambda+2=0 \Rightarrow \Delta=49+32=81=9^2$

$$\Rightarrow \lambda_1=\frac{-7-9}{-8}=2\ ,\ \lambda_2=\frac{-7+9}{-8}=-\frac{1}{4}$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅគឺ $\boxed{y=Ae^{2x}+Be^{-\frac{1}{4}x} \text{ ដែល } A, B \text{ ជាចំនួនថេរ}}$

គ. $y''-2y'=0$

សមីការសម្គាល់គឺ $\lambda^2-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0$, $\lambda_2=2$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅគឺ $\boxed{y=A+Be^{2x} \text{ ដែល } A, B \text{ ជាចំនួនថេរ}}$

ឃ. $y''-3y'+3y=0$

សមីការសម្គាល់គឺ $\lambda^2-3\lambda+3=0 \Rightarrow \Delta=9-12=-3=(i\sqrt{3})^2$

$$\Rightarrow \lambda_1=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \lambda_2=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅគឺ $\boxed{y=e^{\frac{3}{2}x}\left(C\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+D\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$

ដែល C, D ជាចំនួនថេរ

ង. $2y''+3y'-2y=0$

សមីការសម្គាល់គឺ $2\lambda^2+3\lambda-2=0 \Rightarrow \Delta=9+16=25=5^2$

$\Rightarrow \lambda_1=\dfrac{-3-5}{4}=-2\ ,\ \lambda_2=\dfrac{-3+5}{4}=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅគឺ $\boxed{y=Ae^{-2x}+Be^{\frac{1}{2}x} \text{ ដែល } A, B \text{ ជាចំនួនថេរ}}$

ច. $y''-3y'+y=0$

សមីការសម្គាល់គឺ $\lambda^2-3\lambda+1=0 \Rightarrow \Delta=9-4=5$

$\Rightarrow \lambda_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\ ,\ \lambda_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅគឺ $\boxed{y=Ae^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x}+Be^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x} \text{ ដែល } A, B: \text{ថេរ}}$

3. ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ លើ R ។ រកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី 2 អូម៉ូសែនដែលមានអនុគមន៍ f ជាចម្លើយ

ក. $f(x)=(x+1)e^{-2x}$

ខ. $f(x)=2e^{-x}+3e^{3x}$

គ. $f(x)=(2\cos 3x-3\sin 3x)e^{x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=(x+1)e^{-2x}$

គេបាន $\alpha=-2$ ជាឫសឌុបនៃសមីការសម្គាល់ $a\lambda^2+b\lambda+c=0$

$\Rightarrow (\lambda+2)^2=0 \Rightarrow \lambda^2+4\lambda+4=0$

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ៖ $y''+4y'+4y=0\ \ ,\ y(0)=1,\ y'(0)=-1$

ខ. $f(x)=2e^{-x}+3e^{3x}$

គេបាន $A=-1$, $B=3$ ជាឫសនៃសមីការសម្គាល់ $\lambda^2-S\lambda+P=0$

ដែល $S=A+B$, $P=A\cdot B$

គេបានសមីការសម្គាល់គឺ $\lambda^2-2\lambda-3=0$

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ៖ $y''-2y'-3y=0$, $y(0)=5$, $y'(0)=7$

គ. $f(x)=(2\cos 3x-3\sin 3x)e^x$

គេបាន $\alpha=1$, $\beta=3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda_1=1-3i\\ \lambda_2=1+3i\end{array}\right.$

$\alpha=1$, $\beta=3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda_1=1-3i\\ \lambda_2=1+3i\end{array}\right.$ ជាឫសនៃសមីការសម្គាល់ $\lambda^2-S\lambda+P=0$

ដែល $S=\lambda_1+\lambda_2$, $P=\lambda_1\cdot\lambda_2$

$\Rightarrow S=\lambda_1+\lambda_2=2$, $P=\lambda_1\cdot\lambda_2=1+9=10$

$\Rightarrow$ សមីការសម្គាល់គឺ $\lambda^2-2\lambda+10=0$

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ៖ $y''-2y'+10y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=-7$

4. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានលក្ខខណ្ឌដើម ៖

ក. $y''-y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-2$

ខ. $y''-2y'+3y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$

គ. $y''+y=0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$

ឃ. $y''-3y'+2y=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=3$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y''-y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-2$

គេបានសមីការសម្គាល់គឺ $\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda=\pm 1$

$\Rightarrow y=Ae^{-x}+Be^{x}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y''-y=0$

តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=1$, $y'(0)=-2$ គេបាន៖

- $Ae^0 + Be^0 = 1 \Rightarrow A + B = 1$
- $y' = -Ae^x + Be^x \Rightarrow -A + B = -2$

$\Rightarrow A = \dfrac{3}{2} \ , B = -\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{y = \dfrac{3}{2}e^{-x} - \dfrac{1}{2}e^x}$

ខ. $y'' - 2y' + 3y = 0 \ , \ y(0) = 2 \ , \ y'(0) = 1$

គេបានសមីការសម្គាល់គឺ $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \ \Rightarrow \Delta' = 1 - 3 = -2$

$\lambda_1 = 1 - i\sqrt{2} \ , \ \lambda_2 = 1 + i\sqrt{2}$

$\Rightarrow y = e^x(C\cos\sqrt{2}x + D\sin\sqrt{2}x)$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ

$y'' - 2y' + 3y = 0$ ។

តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0) = 2 \ , \ y'(0) = 1$ គេបាន៖

- $e^0(C\cos 0 + D\sin 0) = 2 \Rightarrow C = 2$
- $y' = e^x(C\cos\sqrt{2}x + D\sin\sqrt{2}x) + e^x(-C\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x + D\sqrt{2}\cos\sqrt{2}x)$

$\Rightarrow C + \sqrt{2}D = 1 \ \Rightarrow D = \dfrac{1-2}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{y = e^x\left(2\cos\sqrt{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}x\right)}$ ។

គ. $y'' + y = 0 \ , \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3 \ , \ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$

គេបានសមីការសម្គាល់គឺ $\lambda^2 + 1 = 0 \ \Rightarrow \lambda = \pm i$

$\Rightarrow y = C\cos x + D\sin x$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'' + y = 0$

តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3 \ , \ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$ គេបាន៖

- $C\cos\dfrac{\pi}{2} + D\sin\dfrac{\pi}{2} = 3 \Rightarrow D = 3$
- $y' = -C\sin x + D\cos x$

$\Rightarrow -C = 2 \ \Rightarrow C = -2$

ដូចនេះ $\boxed{y = -2\cos x + 3\sin x}$

ឃ. $y''-3y'+2y=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=3$

គេបានសមីការសម្គាល់គឺ $\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_1=1$, $\lambda_2=2$

$\Rightarrow y=Ae^{x}+Be^{2x}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y''-3y'+2y=0$

តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(1)=1$, $y'(0)=3$ គេបាន៖

- $Ae+Be^2=1$
- $y'=Ae^x+2Be^{2x} \Rightarrow Ae+2Be^2=3$

$\Rightarrow A=-\dfrac{1}{e}$ $,B=\dfrac{1}{e^2}$

ដូចនេះ $\boxed{y=-\dfrac{1}{e}e^x+\dfrac{1}{e^2}e^{2x}=-e^{x-1}+e^{2x-2}}$

5. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''-4y'+2y=4 \quad (E)$ ។

ក. រកអនុគមន៍ថេរ k ដែលមានចម្លើយពិសេសនៃ (E)

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $y''-4y'+2y=4$

គ. រកចម្លើយពិសេសនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដើម

$y(0)=2\sqrt{2}$, $y'(0)=0$

ដំណោះស្រាយ

ក. រកអនុគមន៍ថេរ k ដែលមានចម្លើយពិសេសនៃ (E)

គេបាន $y'=0$ $,y''=0 \Rightarrow 2k=4 \Rightarrow k=2$

ដូចនេះ $\boxed{y_p=k=2}$

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $y''-4y'+2y=4$

-ដោះស្រាយសមីការ $y''-4y'+2y=0$

សមីការសម្គាល់គឺ $\lambda^2-4\lambda+2=0 \Rightarrow \Delta'=4-2=2$

$\Rightarrow \lambda_1=2-\sqrt{2}$, $\lambda_2=2+\sqrt{2}$

គេបាន $y_c=Ae^{(2-\sqrt{2})x}+Be^{(2+\sqrt{2})x}$ ដែល A, B : ថេរ

ដូចនេះ $\boxed{y=y_c+y_p=Ae^{(2-\sqrt{2})x}+Be^{(2+\sqrt{2})x}+2}$

ដែល A, B : ថេរ

គ. រកចម្លើយពិសេសនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដើម

$y(0)=2\sqrt{2}$, $y'(0)=0$ ៖

គេមាន $y=Ae^{(2-\sqrt{2})x}+Be^{(2+\sqrt{2})x}+2$

ដោយ $y(0)=2\sqrt{2} \Rightarrow A+B+2=2\sqrt{2}$

និង $y'(0)=0 \Rightarrow (2-\sqrt{2})A+(2+\sqrt{2})B=0$

គេបាន $\begin{cases} A+B=2\sqrt{2}-2 & (1) \\ (2-\sqrt{2})A+(2+\sqrt{2})B=0 & (2) \end{cases}$

គុណ (1) នឹង $-(2-\sqrt{2}) \Rightarrow -(2-\sqrt{2})A-(2+\sqrt{2})B=8-8\sqrt{2} \quad (3)$

យក $(2)+(3)$ គេបាន $2\sqrt{2}B=8-8\sqrt{2} \Rightarrow B=2\sqrt{2}-4$

ជំនួស B ចូល (1) គេបាន $A=2$

ដូចនេះ $\boxed{y=2e^{(2-\sqrt{2})x}+(2\sqrt{2}-4)e^{(2+\sqrt{2})x}+2}$

6. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+3y'=5 \quad (E)$

ក. រកឫសនៃសមីការសម្គាល់នៃសមីការ (E)

ខ. រកអនុគមន៍ g ដែល $g(x)=Ax$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ សមីការ (E)

គ. ដោះស្រាយសមីការ $y''+3y'=5$

ឃ. រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ កាលណា $y(0)=e^3$, $y'(1)=\dfrac{2}{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកឫសនៃសមីការសម្គាល់នៃសមីការ (E)

សមីការសម្គាល់នៃសមីការ (E) គឺ $\lambda^2+3\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+3)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=0$, $\lambda_2=-3$

ខ. រកអនុគមន៍ g

ដោយ $g(x)=Ax$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

គេបាន $g''(x)+3g'(x)=5 \Rightarrow 3A=5 \Rightarrow A=\dfrac{5}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{g(x)=\dfrac{5}{3}x}$

គ. ដោះស្រាយសមីការ $y''+3y'=5$

តាម(ក) គេបាន $y_c = Ae^0 + Be^{-3x} = A + Be^{-3x}$

តាម(ខ) គេបាន $y_p = \dfrac{5}{3}x$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅ (E) នៃគឺ $\boxed{y = \dfrac{5}{3}x + A + Be^{-3x}}$

ឃ. រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ កាលណា $y(0) = e^3$, $y'(1) = \dfrac{2}{3}$

- $y(0) = e^3 \Rightarrow A + B = e^3$ (1)
- $y'(1) = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{5}{3} - 3Be^{-3} = \dfrac{2}{3}$ (2)

$\Rightarrow B = \dfrac{1}{3}e^3$, $A = \dfrac{2}{3}e^3$

ដូចនេះ $\boxed{y = \dfrac{5}{3}x + \dfrac{2}{3}e^3 + \dfrac{1}{3}e^3e^{-3x}}$

7. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $-y''+2y'+4y=-2\cos 2x$ (E)

ក. ដោះស្រាយសមីការ $-y''+2y'+4y=0$ (E')

ខ. រកចំនួនពិត a និង b ដែលអនុគមន៍ g កំណត់លើ R ដោយ

$g(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)

គ. បង្ហាញថា $h = f + g$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) បើ f ជាចម្លើយនៃ (E')

ឃ.រក h ដែល $h(0)=0$ និង $h'(0)=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដោះស្រាយសមីការ $-y''+2y'+4y=0$ (E')

សមីការសម្គាល់នៃ (E') គឺ $-\lambda^2+2\lambda+4=0$

$\Rightarrow \Delta' = 1 + 4 = 5$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{-1} = 1+\sqrt{5} \\ \lambda_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{-1} = 1-\sqrt{5} \end{array}\right.$$

ដូចនេះចម្លើយនៃ (E') គឺ

$$\boxed{y_c = Ae^{(1-\sqrt{5})x} + Be^{(1+\sqrt{5})x} \ , \ A, B : \text{ថេរ}}$$

ខ. រកចំនួនពិត a និង b ដែលអនុគមន៍ g

គេមាន $g(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)

- $g'(x) = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x$
- $g''(x) = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x$

គេបាន៖

$$4a\cos 2x + 4b\sin 2x - 4a\sin 2x + 4b\cos 2x + 4a\cos 2x +$$
$$+ 4b\sin 2x = -2\cos 2x$$

$(8a+4b)\cos 2x + (8b-4a)\sin 2x = -2\cos 2x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8a+4b = -2 \\ -4a+8b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{5} \\ b = -\dfrac{1}{10} \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{a = -\dfrac{1}{5} \ , \ b = -\dfrac{1}{10}}$

គ. បង្ហាញថា $h = f + g$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E)

គេមាន f ជាចម្លើយនៃ (E') $\Rightarrow -f'' + 2f' + 4f = 0 \quad (1)$

ហើយ g ជាចម្លើយនៃ (E) $\Rightarrow -g'' + 2g' + 4g = -2\cos 2x \quad (2)$

បូកអង្គនិងអង្គរវាង (1) និង (2) គេបាន

$-f'' + 2f' + 4f - g'' + 2g' + 4g = -2\cos 2x$

$-(f+g)'' + 2(f+g)' + 4(f+g) = -2\cos 2x$

ដោយ $h = f + g$ គេបាន $-h'' + 2h' + 4h = -2\cos 2x$

ដូចនេះ $\boxed{h = f + g \text{ ជាចម្លើយទូទៅនៃ } (E)}$

ឃ.រក h ដែល $h(0)=0$ និង $h'(0)=0$

ដោយ $h = f + g$ គេបាន

$$h(x) = Ae^{(1-\sqrt{5})x} + Be^{(1+\sqrt{5})x} - \frac{1}{5}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x$$

$$h'(x) = \left(1-\sqrt{5}\right)Ae^{(1-\sqrt{5})x} + \left(1+\sqrt{5}\right)Be^{(1+\sqrt{5})x} + \frac{2}{5}\sin 2x - \frac{1}{5}\cos 2x$$

- $h(0)=0 \Rightarrow A+B=\dfrac{1}{5}$
- $h'(0)=0 \Rightarrow \left(1-\sqrt{5}\right)A + \left(1+\sqrt{5}\right)B = \dfrac{1}{5}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(1-\sqrt{5}\right)A + \left(1-\sqrt{5}\right)B = \dfrac{1-\sqrt{5}}{5} \\ \left(1-\sqrt{5}\right)A + \left(1+\sqrt{5}\right)B = \dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{10} \\ B = \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{h(x) = \frac{1}{10}e^{(1-\sqrt{5})x} + \frac{1}{10}e^{(1+\sqrt{5})x} + \frac{2}{5}\sin 2x - \frac{1}{5}\cos 2x}$

8. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក. $y''-3y'+5y = 4x^3-2x$

ខ. $y''-2y'+4y = e^x$

គ. $y''+4y = -2$, $y\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{8}\right)=2$

ឃ. $5y''+y' = -6x$, $y(0)=0$, $y'(0) = -10$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y''-3y'+5y = 4x^3-2x$

-ដោះស្រាយសមីការ $y''-3y'+5y = 0$

សមីការសម្គាល់គឺ $\lambda^2-3\lambda+5=0 \Rightarrow \Delta = 9-4\cdot 5 = -11$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{3-i\sqrt{11}}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2} \quad , \lambda_2 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$\Rightarrow y_c = e^{\frac{3}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x\right)$$

-រកចម្លើយពិសេស: $y_p = ax^3+bx^2+cx+d$

$$y'_p = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$y''_p = 6ax + 2b$$
$$\Rightarrow 6ax + 2b - 3(3ax^2 + 2bx + c) + 5(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 4x^3 - 2x$$
$$5ax^3 + (5b - 9a)x^2 + (6a - 6b + 5c)x + 2b - 3c + 5d = 4x^3 - 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a = 4 \\ 5b - 9a = 0 \\ 6a - 6b + 5c = -2 \\ 2b - 3c + 5d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4}{5} \\ b = \dfrac{9a}{5} = \dfrac{9}{5}\cdot\dfrac{4}{5} = \dfrac{36}{25} \\ c = \dfrac{(-2 - 6a + 6c)}{5} = \dfrac{\left(-2 - 6\cdot\dfrac{4}{5} + 6\cdot\dfrac{36}{25}\right)}{5} = \dfrac{46}{125} \\ d = \dfrac{1}{5}(3c - 2b) = \dfrac{1}{5}\left(3\cdot\dfrac{46}{125} - 2\cdot\dfrac{36}{25}\right) = -\dfrac{222}{625} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{4}{5}x^3 + \frac{36}{25}x^2 + \frac{46}{125}x - \frac{222}{625}$$

ដូចនេះ $\boxed{y = e^{\frac{3}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x\right) + \frac{4}{5}x^3 + \frac{36}{25}x^2 + \frac{46}{125}x - \frac{222}{625}}$

ខ. $y'' - 2y' + 4y = e^x$

-ដោះស្រាយសមីការ $y'' - 2y' + 4y = 0$

សមីការសម្គាល់គឺ $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \Delta' = 1 - 4 = -3$

$\lambda_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $\lambda_2 = 1 + i\sqrt{3}$

$\Rightarrow y_c = e^x\left(C\cos\sqrt{3}x + D\sin\sqrt{3}x\right)$

-រកចម្លើយពិសេស: $y_p = Ae^x \Rightarrow y'_p = Ae^x$, $y''_p = Ae^x$

$\Rightarrow Ae^x - 2Ae^x + 4Ae^x = e^x$

$\Rightarrow y_p = \dfrac{1}{3}e^x$

$\Rightarrow 3Ae^x = e^x \Rightarrow A = \dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{y = e^x\left(C\cos\sqrt{3}x + D\sin\sqrt{3}x\right)\frac{1}{3}e^x \text{ , } C, D: \text{ថេរ}}$

គ. $y''+4y=-2\ \ ,\ y\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\ ,\ y'\left(\frac{\pi}{8}\right)=2$

-ដោះស្រាយសមីការ $y''+4y=0$

សមីការសម្គាល់គឺ $\lambda^2+4=0\ \Rightarrow\lambda=\pm 2i$

$\Rightarrow y_c=C\cos 2x+D\sin 2x$

-រកចម្លើយពិសេស: $y_p=\alpha\ \ \Rightarrow 4\alpha=-2\ \Rightarrow\alpha=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y_p=-\frac{1}{2}$

គេបាន $y=C\cos 2x+D\sin 2x-\frac{1}{2}$

តាមលក្ខខណ្ឌ $y\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\ ,\ y'\left(\frac{\pi}{8}\right)=2$ គេបាន

$\frac{\sqrt{2}}{2}C+\frac{\sqrt{2}}{2}D-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow C+D=\sqrt{2}\quad (1)$

- $y'=-2C\sin 2x+2D\cos 2x$

$\Rightarrow -\sqrt{2}C+\sqrt{2}D=2\ \Rightarrow D-C=\sqrt{2}\quad (2)$

$(1)+(2)\ \Rightarrow 2D=2\sqrt{2}\ \ \Rightarrow D=\sqrt{2}$

$\Rightarrow C=0$

ដូចនេះ $\boxed{y=\sqrt{2}\sin 2x-\frac{1}{2}}$

ឃ. $5y''+y'=-6x\ \ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=-10$

-ដោះស្រាយសមីការ $5y''+y'=0$

សមីការសម្គាល់គឺ $5\lambda^2+\lambda=0\ \Rightarrow\lambda(5\lambda+1)=0$

$\Rightarrow\lambda_1=0\ ,\ \lambda_2=-\frac{1}{5}$

$\Rightarrow y_c=A+Be^{-\frac{1}{5}x}$

-រកចម្លើយពិសេស: $y_p=ax^2+bx+c$

$y_p'=2ax+b\ \ ,\ y''=2a$

$\Rightarrow 10a+2ax+b=-6x$

$\Rightarrow\begin{cases}2a=-6\\10a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\b=30\end{cases}$

$\Rightarrow y_p = -3x^2 + 30x + c \ \ , c :$ ថេរ

គេបាន $y = A + Be^{-\frac{1}{5}x} - 3x^2 + 30x + c$

តាមលក្ខខណ្ឌ $y(0)=0$, $y'(0) = -10$ គេបាន

- $y(0)=0 \Rightarrow A+B+c=0$
- $y'(0)=-10 \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{5}Be^{-\frac{1}{5}x} - 6x + 30 \Rightarrow -\dfrac{1}{5}B + 30 = -10$

$\Rightarrow B = 200 \quad \Rightarrow A = -200 - c$

$$y = -200 - c + 200e^{-\frac{1}{5}x} - 3x^2 + 30x + c$$

$$= 200e^{-\frac{1}{5}x} - 3x^2 + 30x - 200$$

ដូចនេះ $\boxed{y = 200e^{-\frac{1}{5}x} - 3x^2 + 30x - 200}$

9. ចល័តមួយផ្លាស់ទីជាបន្ទាត់ត្រង់នៅលើអ័ក្ស (ox) ។ នៅខណ: ពេល t ចល័តមកដល់ចំណុចដែលមាន អាប់ស៊ីស x ដោយ ល្បឿន x' និង សំទុះ x'' ។ គេដឹងថា $x''+x'+x=0$ និងនៅខណ:ដើម $t=0$ ចល័តនេះនៅ ត្រង់គល់ O ដោយមាន ល្បឿន ដើម $2m/s$ ។

ក. រកសមីការនៃចលនានេះ $x(t)$ ។

ខ.គណនាល្បឿន និងសំទុះរបស់ចល័ត កាលណាវាឆ្លងកាត់ ចំណុច O ម្តងទៀតនៅលើកទី 1 ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកសមីការនៃចលនានេះ $x(t)$

គេមាន $x'' + x' + x = 0$

សមីការសម្គាល់គឺ $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

គេបាន $x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + B\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

ដោយនៅខណៈដើម $t=0$ ចល័តនេះបិតនៅត្រង់គល់ O និងមាន ល្បឿនដើម

$v_o = 2m/s$ នោះគេបាន $\begin{cases} x(0)=0 \\ x'(0)=2 \end{cases}$

- $x(0)=0 \Rightarrow A=0$
- $x'(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) +$

$$+\,e^{-\frac{1}{2}t}\left(-A\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + B\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 2 \Rightarrow B = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}$

ខ.គណនាល្បឿន និងសំទុះរបស់ចល័ត

- ល្បឿនរបស់ចល័តគឺ

$$x'(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + e^{-\frac{1}{2}t}\left(2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$\Rightarrow x'(t) = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + 2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}$$

- សំទុះរបស់ចល័តគឺ

$$x''(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$\Rightarrow x''(t) = \frac{-2\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - 2e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

10. បើគេប្រើកម្លាំង $400N$ ទាញរ៉ឺសរមួយ នោះរ៉ឺសរលូតបាន ប្រវែង $2m$ ។ គេព្យួរម៉ាស $50kg$ នៅខាងចុងរ៉ឺសរនេះ គេឲ្យម៉ាសមានចលនាចេញពី ទីតាំងលំនឹងដោយល្បឿន $10m/s$ រត់ទៅលើ ។ រកសមីការនៃចលនានេះ។

ដំណោះស្រាយ

រកសមីការនៃចលនា

គេដឹងថាកម្លាំង $400N$ ធ្វើឲ្យរ៉ឺសរលូតបានប្រវែង $2m$ នោះ តាមច្បាប់ហ៊ុកគេបាន

$$F = kS \Rightarrow k = \frac{F}{S} = \frac{400}{2} = 200N/m$$

ដោយចលនានេះគ្មានកម្លាំងកកិត នោះគេទាញបាន សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដូចខាងក្រោម ៖

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \Leftrightarrow x'' + \frac{200}{50}x = 0 \Leftrightarrow x'' + 4x = 0$$

សមីការសម្គាល់គឺ $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$

$$\Rightarrow x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$$

$$x'(t) = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t$$

ដោយ $t = 0$, $x'(0) = 10$ និង $x(0) = 0$ (ព្រោះគេឲ្យម៉ាសចេញពីទីតាំងលំនឹង) គេបាន

$$\begin{cases} A = 0 \\ 2B = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -5 \end{cases}$$

ដូចនេះសមីការនៃចលនាគឺ $\boxed{x(t) = -5\sin 2t}$

ដំណោះស្រាយលំហាត់ជំពូក

1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក. $y'-3y=3x+2$ ខ. $xy'-y=1-\ln x$

គ. $y'+2y=e^{-2x}$ ឃ. $y'+y=2e^{x}$

ង. $y'+y=\cos x+\sin x$ ច. $y'+2y=2x^2-3$

ឆ. $y'+5y=20\ \ ,y(0)=2$ ជ. $y'+y=1\ \ ,y(0)=0$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y'-3y=3x+2$

- ចម្លើយអូម៉ូសែន

ដោះស្រាយ: $y'-3y=0\ \Rightarrow y=Ae^{3x}\ \ (a)$

- តាមបម្រែបម្រួលអថេរយើងបាន៖

តាង $y=A(x)e^{3x}\Rightarrow y'=A'(x)e^{3x}+3A(x)e^{3x}$ នោះ

$$y'-3y=3x+2$$

$$\Leftrightarrow A'(x)e^{3x}+3A(x)e^{3x}-3A(x)e^{3x}=3x+2$$

$$\Leftrightarrow A'(x)e^{3x}=3x+2$$

$$\Rightarrow A'(x)=\frac{3x+2}{e^{3x}}\Rightarrow A(x)=\int\frac{3x+2}{e^{3x}}dx$$

តាង $u=3x+2\Rightarrow du=3dx$

$$dv=\frac{dx}{e^{3x}}\Rightarrow v=\int\frac{dx}{e^{3x}}=-\frac{1}{3e^{3x}}$$

$$A(x)=-\frac{3x+2}{3e^{3x}}+\int\frac{1}{3e^{3x}}3dx=-\frac{3x+2}{3e^{3x}}-\frac{1}{3e^{3x}}+c$$

$$A(x)=-\frac{3x+2}{3e^{3x}}+\int\frac{1}{3e^{3x}}3dx=-\frac{x+1}{e^{3x}}+c$$

តាម $(a)\Rightarrow y=\left(-\frac{x+1}{e^{3x}}+c\right)e^{3x}=-(x+1)+ce^{3x}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅគឺ $\boxed{y=-(x+1)+ce^{3x}}$ ។

ខ.គណនា $xy'-y=1-\ln x$

$$xy'-y=1-\ln x$$

$$\Leftrightarrow y'-\frac{y}{x}=\frac{1-\ln x}{x}$$

តាង $p(x)=-\frac{1}{x}\Rightarrow u(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow y'-\frac{1}{x}y=\frac{1-\ln x}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(y\frac{1}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\Rightarrow y\frac{1}{x}=\int\frac{1-\ln x}{x^2}dx=\int\frac{1}{x^2}dx-\int\frac{\ln x}{x^2}dx$$

$$\Rightarrow y\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}-\int\frac{\ln x}{x^2}dx$$

តាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគេបាន៖

យក $u=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$ និង

$$dv=\frac{1}{x^2}dx\Rightarrow v=\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}-\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{\ln x}{x}+c$$

$$\Rightarrow y=\ln x+cx$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅគឺ $\boxed{y=\ln x+cx}$។

គ. គណនា $y'+2y=e^{-2x}$

- ចម្លើយអូម៉ូសែន

ដោះស្រាយ $y'+2y=0\Rightarrow y=Ae^{-2x}\ (b)$

- តាមបម្រែបម្រួលអថេរយើងបាន៖

យក $y=A(x)e^{-2x}\Rightarrow y'=A'(x)e^{-2x}-2A(x)e^{-2x}$

$\Rightarrow y'+2y=e^{-2x}$

$\Leftrightarrow A'(x)e^{-2x}-2A(x)e^{-2x}+2A(x)e^{-2x}=e^{-2x}$

$\Rightarrow A'(x)=1 \Rightarrow A(x)=x+c$

តាម $(b) \Rightarrow y=(x+c)e^{-2x}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅគឺ $\boxed{y=(x+c)e^{-2x}}$។

ឃ. គណនា $y'+y=2e^{x}$

- ចម្លើយអូម៉ូសែន

ដោះស្រាយ $y'+y=0 \Rightarrow y=Ae^{-x} \quad (c)$

- តាមបម្រែបម្រួលអថេរយើងបាន៖

យក $y=A(x)e^{-x} \Rightarrow y'=A'(x)e^{-x}-A(x)e^{-x}$

$\Rightarrow y'+y=2e^{x}$

$\Leftrightarrow A'(x)e^{-x}-A(x)e^{-x}+A(x)e^{-x}=2e^{x}$

$\Rightarrow A'(x)=2e^{2x} \Rightarrow A(x)=e^{2x}+c$

តាម $(c) \Rightarrow y=\left(e^{2x}+c\right)e^{-x}=e^{x}+ce^{-x}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅគឺ $\boxed{y=e^{x}+ce^{-x}}$។

ង. គណនា $y'+y=\cos x+\sin x$

- ចម្លើយអូម៉ូសែន

ដោះស្រាយ $y'+y=0 \Rightarrow y_c=Ae^{-x} \quad (d)$

- ចម្លើយពិសេស

តាង $y_p=A\sin x+B\cos x \Rightarrow y'_p=A\cos x-B\sin x$ នោះ៖

$A\cos x-B\sin x+B\cos x+A\sin x=\cos x+\sin x$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \end{cases} \Rightarrow y_p=\sin x \quad (e)$$

តាម $(d)\&(e) \quad y=y_c+y_p=Ae^{-x}+\sin x$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅគឺ $\boxed{y=y_c+y_p=Ae^{-x}+\sin x}$។

ច. គណនា $y'+2y=2x^2-3$

- ចម្លើយអូម៉ូសែន

$y'+2y=0 \Rightarrow y_c = Ae^{-2x} \quad (f)$

- ចម្លើយពិសេស

តាង $y_p = ax^2+bx+c \Rightarrow y'_p = 2ax+b$

$\Rightarrow y'+2y=2x^2-3$

$\Leftrightarrow 2ax+b+2(ax^2+bx+c)=2x^2-3$

$\Rightarrow 2ax^2+(2a+2b)x+b+2c=2x^2-3$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a=2 \\ 2a+2b=0 \\ b+2c=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow y_p = x^2-x-1 \qquad (g)$

តាម $(f)\&(g)$ $y=y_c+y_p=Ae^{-2x}+x^2-x-1$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅគឺ $\boxed{y=y_c+y_p=Ae^{-2x}+x^2-x-1}$។

ឆ. គណនា $y'+5y=20\ ,y(0)=2$

- ចម្លើយអូម៉ូសែន

$y'+5y=0 \Rightarrow y=Ae^{-5x} \quad (h)$

- ចម្លើយពិសេស

តាង $y_p=k \Rightarrow y'_p=0$

$\Rightarrow y'+5y=20$

$\Leftrightarrow 0+5k=20 \Rightarrow k=4$

$\Rightarrow y_p=4 \quad (i)$

តាម $(h)\&(i)$ $y=y_c+y_p=Ae^{-5x}+4$ ជាចម្លើយទូទៅ

តែ $y(0)=2 \Leftrightarrow A+4=2 \Rightarrow A=-2$

ដូចនេះចម្លើយគឺ $\boxed{y=-2e^{-5x}+4}$។

ជ. គណនា $y'+y=1\ ,y(0)=0$

- ចម្លើយអូម៉ូសែន

$y'+y=0 \Rightarrow y=Ae^{-x} \quad (j)$

- ចម្លើយពិសេស

តាង $y_p = k \Rightarrow y'_p = 0$

$\Rightarrow y' + y = 20$

$\Leftrightarrow 0 + k = 1 \Rightarrow k = 1$

$\Rightarrow y_p = 1 \quad (k)$

តាម $(j)\&(k)$ $y = y_c + y_p = Ae^{-x} + 1$ ជាចម្លើយទូទៅ

តែ $y(0) = 0 \Leftrightarrow A + 1 = 0 \Rightarrow A = -1$

ដូចនេះចម្លើយគឺ $\boxed{y = -e^{-x} + 1}$ ។

2. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5x + 3 \quad (E)$

ក. រកពហុធាដឺក្រេទី 2 $P(x)$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)

ខ. បង្ហាញថា f ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) បើ $h = f - P$ ជាចម្លើយទូទៅ នៃសមីការ

$y'' - 3y' + 2y = 0 \ (E')$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ (E') រួចទាញរកអនុគមន៍ f ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) ។

ឃ. រកចម្លើយ f មួយនៃ (E) ដែលខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ f កាត់តាមចំណុចគល់

កូអរដោនេ ហើយប៉ះនឹងបន្ទាត់ដែល ស្របនឹងអ័ក្ស អាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុចនោះ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកពហុធាដឺក្រេទីពីរ $P(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)

ដោយ $P(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow P'(x) = 2ax + b$ និង $P''(x) = 2a$ នាំអោយ (E) ក្លាយ

$(E): 2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 - 5x + 3$

$\Leftrightarrow 2ax^2 + (2b - 6a)x + (2a - 3b + 2c) = 2x^2 - 5x + 3$

ជា

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ 2b - 6a = -5 \\ 2a - 3b + 2c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

ដូចនេះ $P(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

ខ. បង្ហាញថា f ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) ដោយជាចម្លើយនៃ

$y''-3y'+2y=0 \quad (E')$

$\Rightarrow h''-3h'+2h=0 \quad (1)$

ហើយ P ជាចម្លើយនៃ (E) គេបាន

$P''-3P'+2P=2x^2-5x+3 \quad (2)$

$(1)+(2)$ គេបាន $(h+P)''-3(h+P)'+2(h+P)=2x^2-5x+3$

ដោយ $h=f-P \Rightarrow f=h+P$ គេបាន

$f''-3f'+2f=2x^2-5x+3$

ដូចនេះ f ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E)។

គ . ដោះស្រាយសមីការ $y''-3y'+2y=0 \quad (E')$

គេបានសមីការសម្គាល់នៃ (E') គឺ $r^2-3r+2=0$ គេបាន $r_1=1;\ r_2=2$ គេបាន

$y_c=Ae^x+Be^{2x} \Rightarrow h=Ae^x+Be^{2x}$

ដូចនេះ $f=Ae^x+Be^{2x}+x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E')។

ឃ. រកចម្លើយ f មួយនៃ (E) ដោយខ្សែកោង (C)

តាងអនុគមន៍ f កាត់តាមចំនុចគល់កូអរដោនេហើយប៉ះនឹងបន្ទាត់ដែលស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំនុចនោះ

គេទាញបាន $\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=0 \end{cases}$

យើងមាន $f(x)=Ae^x+Be^{2x}+x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$

$\Rightarrow f'(x)=Ae^x+2Be^{2x}+2x+\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+\frac{5}{4}=0 \\ A+2B+\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=\frac{3}{4} \end{cases}$$

ដូចនេះ $f(x)=-2e^x+\frac{3}{4}e^{2x}+x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$ ជាចម្លើយនៃ (E)។

3. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+9y=2\cos x \quad (E)$ ។ គេតាង $y=Z+k\cos x$ ដែល Z ជាអនុគមន៍នៃ x និង k ជាចំនួនពិតថេរ ។

ក. រក k ដែល Z ជាចម្លើយនៃសមីការ $Z''+9Z=0$ កាលណា $y=Z+k\cos x$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E)

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $Z''+9Z=0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

គ. រកចម្លើយមួយនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $y(0)=0$, $y'(\pi)=3$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រក k ដែល z ជាចម្លើយនៃសមីការ $z''+9z=0$ កាលណា $y=z+k\cos x$ ជាចម្លើយនៃ (E) នោះគេបាន

$$\begin{cases} y'=z'-k\sin x \\ y''=z''-k\cos x \end{cases}$$ y ជាចម្លើយនៃ (E) គេបាន

$$z''-k\cos x+9z+9k\cos x=2\cos x$$

$$z''+9z+8k\cos x=2\cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z''+9z=0 \\ 8k=2 \end{cases} \Rightarrow k=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $k=\frac{1}{4}$ ដែល z ជាចម្លើយនៃសមីការ $z''+9z=0$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $z''+9z=0$

គេបានសមីការសម្គាល់នៃ (E') គឺ $r^2+9=0$ គេបាន

$r_1=3i;\ r_2=-3i \Rightarrow z=A\cos 3x+B\sin 3x$ គេបាន

$$y=A\cos 3x+B\sin 3x+\frac{1}{4}\cos x$$

ដូចនេះ $y=A\cos 3x+B\sin 3x+\frac{1}{4}\cos x$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

គ. រកចម្លើយមួយនៃ (E)

យើងមាន $y=A\cos 3x+B\sin 3x+\frac{1}{4}\cos x$

$\Rightarrow y = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x - \frac{1}{4}\sin x$

ដោយ $y(0) = 0$ និង $y'(\pi) = 3$ គេបាន

$$\begin{cases} A + \frac{1}{4} = 0 \\ -3B = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = -1 \end{cases}$$

ដូចនេះ $y = -\frac{1}{4}\cos 3x - \sin 3x + \frac{1}{4}\cos x$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E)។

4. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' + y = \sin x \quad (E)$

   ក. រកចំនួនពិត α ដែលអនុគមន៍ φ កំណត់លើ R ដោយ $\varphi(x) = \alpha x\cos x$ ជាចម្លើយនៃ (E)។

   ខ. តាង f ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) ។ បង្ហាញថា $(f-\varphi)'' + (f-\varphi) = 0$ ។

   គ. ដោះស្រាយសមីការ $y'' + y = 0$ ។ ទាញរកចម្លើយទូទៅ f នៃ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកចំនួនពិត α

ដោយ $\varphi(x) = \alpha x\cos x$ ជាចម្លើយនៃ (E) នាំអោយ

$\varphi(x) = \alpha x\cos x$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $y'' + y = \sin x$

តែ $\varphi(x) = \alpha x\cos x \Rightarrow \varphi'(x) = \alpha\cos x - \alpha x\sin x$

$\Rightarrow \varphi''(x) = -2\alpha\sin x - \alpha x\cos x$ គេបាន $y'' + y = \sin x$

$\Leftrightarrow -2\alpha\sin x - \alpha x\cos x + \alpha x\cos x = \sin x$

ដូចនេះ $\alpha = -\frac{1}{2}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $(f-\varphi)'' + (f-\varphi) = 0$

ដោយ f ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) គេបាន $f'' + f = \sin x \ (1)$

និង φ ជាចម្លើយមួយនៃ (E) គេបាន $\varphi'' + \varphi = \sin x \ (2)$

យក $(1) - (2) \Leftrightarrow (f-\varphi)'' + (f-\varphi) = 0$ ពិត។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $y''+y=0$

គេបានសមីការសម្គាល់គឺ $r^2+1=0$ គេបាន

$r_1=i;\, r_2=-i \Rightarrow y=A\cos x+B\sin x$ គេបាន

ដោយ $(f-\varphi)''+(f-\varphi)=0 \Rightarrow y=f-\varphi$

ដែល y ជាចម្លើយនៃ $y''+y=0$

$$\Rightarrow f=y+\varphi=A\cos x+B\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$$

ដូចនេះ $f=A\cos x+B\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E)

5. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $y''+4y'+5y=35e^{-4x}$, $y(0)=-3$, $y'(0)=1$

ខ. $y''-2y'+5y=10\cos x$

គ. $y''+4y=\sin x$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $y''+4y'+5y=35e^{-4x}$; $y(0)=-3$; $y'(0)=1$

- ដោះស្រាយ $y''+4y'+5y=0$

គេបានសមីការសម្គាល់គឺ $r^2+4r+5=0$ គេបានរឹសពីរគឺ $r_1=-2+i;\, r_2=-2-i$

$$\Rightarrow y_c=e^{-2x}(A\cos x+B\sin x)$$

- រកចម្លើយពិសេស

តាង $y_p=Ce^{-4x} \Rightarrow y'_p=-4Ce^{-4x}$; $y''_p=16Ce^{-4x}$

$$\Rightarrow y''+4y'+5y=35e^{-4x} \Leftrightarrow 16e^{-4x}-16e^{-4x}+5Ce^{-4x}=35e^{-4x}$$

$$\Rightarrow C=7 \Rightarrow y_p=7e^{-4x}$$

ដូចនេះ $y=e^{-2x}(A\cos x+B\sin x)+7e^{-4x}$ ជាចម្លើយទូទៅ។

$$\Rightarrow y'=e^{-2x}((B-2A)\cos x-(2B+A)\sin x)-28e^{-4x}$$

តាមលក្ខខ័ណ្ឌ $\begin{cases} y(0)=-3 \\ y'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+7=-3 \\ B-2A-28=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-10 \\ B=9 \end{cases}$

ដូចនេះ $y=e^{-2x}(-10\cos x+9\sin x)+7e^{-4x}$ ជាចម្លើយ។

ខ. $y''-2y'+5y=10\cos x$

- ដោះស្រាយ $y''-2y'+5y=0$

គេបានសមីការសម្គាល់គឺ $r^2-2r+5=0$ គេបានរឹសពីរគឺ $r_1=1-2i;\ r_2=1+2i$

$\Rightarrow y_c=e^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$

- រកចម្លើយពិសេស

តាង $y_p=C\cos x+D\sin x \Rightarrow y'_p=-C\sin x+D\cos x$

និង $y''_p=-C\cos x-D\sin x$

$\Rightarrow y''-2y'+5y=10\cos x$

$\Leftrightarrow (4C-2D)\cos x+(2C+4D)\sin x=10\cos x$

$$\Rightarrow \begin{cases}4C-2D=10\\2C+4D=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C=2\\D=-1\end{cases}$$

ដូចនេះ $y=e^x(A\cos 2x+B\sin 2x)+2\cos x-\sin x$ ជាចម្លើយទូទៅ។

គ. $y''+4y=\sin x \quad ;y(0)=1\ ;y'(0)=2$

- ដោះស្រាយ $y''+4y=0$

គេបានសមីការសម្គាល់គឺ $r^2+4=0$ គេបានរឹសពីរគឺ $r_1=-2i;\ r_2=2i$

$\Rightarrow y_c=(A\cos 2x+B\sin 2x)$

- រកចម្លើយពិសេស

តាង $y_p=C\cos x+D\sin x \Rightarrow y'_p=-C\sin x+D\cos x$

និង $y''_p=-C\cos x-D\sin x$ គេបាន

$\Rightarrow y''+4y=\sin x$

$\Leftrightarrow -C\cos x-D\sin x+4C\cos x+4D\sin x=\sin x$

$\Leftrightarrow 3C\cos x+3D\sin x=\sin x$

$$\Rightarrow \begin{cases}3C=0\\3D=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C=0\\D=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

ដូចនេះ $y=(A\cos 2x+B\sin 2x)+\dfrac{1}{3}\sin x$ ជាចម្លើយទូទៅ។

$\Rightarrow y'=(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)+\dfrac{1}{3}\cos x$

តាមលក្ខខ័ណ្ឌ $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ 2B+\frac{1}{3}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=\frac{5}{6} \end{cases}$

ដូចនេះ $y=\left(\cos 2x+\frac{5}{6}\sin 2x\right)+\frac{1}{3}\sin x$ ជាចម្លើយ។

6. គេយកទឹកមួយកំសៀវដែលទើបនឹងដាំពុះមានសីតុណ្ហភាព $100^\circ C$ មក ដាក់ក្នុងបន្ទប់មួយដែលមានសីតុណ្ហភាព $20^\circ C$ ។ គេដឹងថា 20 នាទី ក្រោយមកសីតុណ្ហភាពទឹក ថយចុះ នៅត្រឹម $60^\circ C$ ។តើក្នុងរយៈពេលប៉ុន្មាននាទីដែល សីតុណ្ហភាពទឹកថយចុះពី $60^\circ C$ មក $30^\circ C$?

ដំណោះស្រាយ

អត្រាថយចុះនៃសីតុណ្ហភាពគឺ $-\frac{dT}{dt}$ ហើយអត្រាថយចុះសមាមាត្រនឹងផលដករវាងសីតុណ្ហភាពទឹកនិងសីតុណ្ហភាពបន្ទប់នោះគេបានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $-\frac{dT}{dt}=k(T-R)$

តាមលក្ខខ័ណ្ឌដើម $T(0)=100^0 C$ និងសីតុណ្ហភាពបន្ទប់ $R=20^0 C$ នោះគេបាន

$$-\frac{dT}{dt}=k(T-20) \Leftrightarrow \frac{dT}{T-20}=-kdt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dT}{T-20}=\int -kdt$$

$$\Leftrightarrow \ln|T-20|=-kt+c$$

$$T-20=Ae^{-kt} \Rightarrow T(t)=20+Ae^{-kt} \quad (A=\pm e^c)$$

ដោយ $T(0)=100^0 C$ នោះគេបាន $T(t)=20+Ae^{-kt}$

$$\Leftrightarrow 100=20+A \Rightarrow A=80$$

ដូចនេះ $T(t)=20+80e^{-kt}$

ដោយ 20 នាទីក្រោយមកសីតុណ្ហភាពទឹកថយចុះនៅត្រឹម $60^0 C$ គេបាន $T(20)=60^0 C$

$$\Leftrightarrow 20+80e^{-20k}=60$$

$$\Rightarrow 40=80e^{-20k} \Rightarrow e^{-20k}=\frac{1}{2} \Rightarrow k=\frac{\ln 2}{20}=0.03466$$

ដូចនេះ $T(t)=20+80e^{-0.03466t}$

គេបានរយៈពេលដែលសីតុណ្ហភាពទឹកថយចុះដល់ $30^0 C$ គឺ $T(t)=30$

$\Leftrightarrow 30 = 20 + 80e^{-0.03466t} \Rightarrow e^{-0.03466t} = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow t = \frac{\ln 8}{0.03466} \approx 60$

ដូចនេះរយះពេលដែលសីតុណ្ហភាពទឹកថយចុះពី $60\,^0C$ មក $30\,^0C$ គឺ $t = 60$ នាទី។

7. នៅពេលដែលកាំរស្មីចាំងពន្លឺទៅលើផ្ទៃនៃអង្គធាតុរាវមួយ នោះបរិមាណ ពន្លឺត្រូវបានអង្គធាតុរាវស្រូបយកអស់ មួយចំនួន។ គេដឹងថា បរិមាណពន្លឺ dy ដែលអង្គធាតុរាវ ស្រូបយកសមាមាត្រ ទៅនឹងផលគុណនៃប្រវែងជម្រៅ dx ដែលកាំពន្លឺទៅដល់នឹង បរិមាណពន្លឺ y ដែលនៅសល់ ត្រង់ផ្ទៃដែល កាំពន្លឺប៉ះ ។ រកបរិមាណពន្លឺដែលនៅសល់ ត្រង់ជម្រៅ x បើគេដឹងថាបរិមាណពន្លឺដែលមានពីដំបូងគឺ y_0 ។

ដំណោះស្រាយ

អត្រាបរិមាណពន្លឺដែលអង្គធាតុស្រូបយកគឺ $-dy$ ហើយអត្រានេះសមមសត្រទៅនឹងផលគុណនៃប្រវែងជម្រៅ dx ដែលកាំពន្លឺទៅដល់និងបរិមាណពន្លឺ y ដែលនៅសល់ត្រង់ផ្ទៃដែលកាំពន្លឺប៉ះនោះគេបានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $-dy = kydx \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -kdx$

$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -kdx \Leftrightarrow \ln|y| = -kx + c$

$\Rightarrow y = Ae^{-kx} \quad (A = \pm e^c)$

ដោយគេដឹងថាបរិមាណពន្លឺដែលមានពីដំបូងគឺ y_0

$\Rightarrow A = y_0$

ដូចនេះបរិមាណពន្លឺដែលនៅសល់ត្រង់ជម្រៅ x គឺ $y = y_0 e^{-kx}$

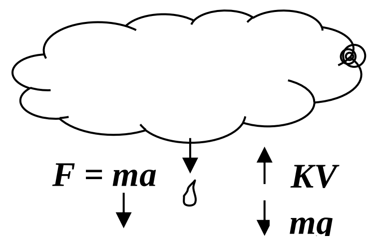
ដែល k ជាមេគុណសមមាត្រ។

8. នៅពេលភ្លៀងធ្លាក់ តំណក់ទឹកភ្លៀងដែលធ្លាក់ចុះមកត្រូវ រងនូវ កម្លាំងទប់ នៃខ្យល់ បើមិនដូចនេះទេ មនុស្សនឹងអាច ស្លាប់ដោយសារតំណក់ទឹកភ្លៀងនៅរៀងរាល់រដូវវស្សា ។ គេដឹងថាកម្លាំង ទប់ខ្យល់សមាមាត្រនឹងល្បឿននៃទឹកភ្លៀង ដែលកំពុងធ្លាក់ ហើយគ្មានកម្លាំងផ្សេងទៀត មានអំពើលើ តំណក់ទឹកភ្លៀង និងទឹកភ្លៀងធ្លាក់ចុះត្រង់ទៅផែនដី ។ រកល្បឿនរបស់

តំណាក់ ទឹកភ្លៀងនៅខណៈពេល t បើគេដឹងថា តំណាក់ទឹកភ្លៀងមាន ម៉ាស m និង ល្បឿនដើម $v_0 = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេដឹងថា a ជាសំទុះនៃបំលាស់ទីរបស់ដំណាក់ទឹកភ្លៀងដែលមានម៉ាស m នាំអោយតាមច្បាប់ទីពីរញូតុនគេបានតំណាក់ទឹកភ្លៀងធ្លាក់មកផែនដីក្នុងកម្លាំង $F = ma = m\dfrac{dv}{dt}$



ម្យ៉ាងទៀតតំណាក់ទឹកភ្លៀងមានម៉ាស់ m គេបានតំណាក់ទឹកភ្លៀងត្រូវរងនូវកម្លាំងទំនាញផែនដី $F_p = mg$ ហើយតំណាក់ទឹកភ្លៀងធ្លាក់ចុះមកត្រូវរងនូវកម្លាំងទប់នៃខ្យល់ដែលកម្លាំងនេះសមមាត្រទៅនឹងល្បឿននៃទឹកភ្លៀងដែលកំពុងធ្លាក់នោះគេបាន $F_r = kv$ ។គេបានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃចលនានេះគឺ

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \ \ (F = F_p - F_r)$$

$$v' + \frac{k}{m}v = g$$

- ដោះស្រាយ $v' + \dfrac{k}{m}v = 0$

$\Rightarrow v_c = Ce^{-\frac{k}{m}t}$

- រកចម្លើយពិសេស $v_p = a \Rightarrow v'_p = 0$

$\Rightarrow v' + \dfrac{k}{m}v = g \Leftrightarrow \dfrac{k}{m}a = g \Rightarrow a = \dfrac{mg}{k}$

គេបាន $v = v_p + v_c = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \dfrac{mg}{k}$ ដោយនៅខណៈ $t = o,\ v(0) = v_0 = 0$ គេបាន

$0 = C + \dfrac{mg}{k} \Rightarrow C = -\dfrac{mg}{k}$

ដូចនេះល្បឿនរបស់ដំណាក់ទឹកភ្លៀងនៅខណៈពេល t គឺ

$v=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$ ។

9. គេភ្ជាប់ម៉ាស $1kg$ នៅខាងចុងរ៉ឺសរ ដែលមានមេគុណថេរ កម្រាញ $16N/m$ ។ ប្រព័ន្ធនៃចលនារ៉ឺសរធ្វើនៅក្នុងអង្គធាតុ រាវដែលមានកម្លាំង កកិតស្មើនឹង10ដងនៃល្បឿនដែលមានក្នុង ខណ:នោះ ។ រកសមីការនៃចលនា បើ ៖

ក. គេលែងម៉ាសឲ្យចេញពីចំណុចនៅខាងក្រោមទីតាំង លំនឹងប្រវែង$1m$ ។

ខ. គេលែងម៉ាសឲ្យចេញពីចំណុចនៅខាងក្រោមទីតាំង លំនឹងប្រវែង$1m$ ដោយឲ្យល្បឿនរត់ឡើងលើ $12m/s$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គេលែងម៉ាស់អោយចេញពីចំនុចនៅខាងក្រោមទីតាំងលំនឹងប្រវែង$1m$

បើគេប្រើកំលាំង F ធ្វើអោយវត្ថុមានចលនាតាមទិសឈរនោះតាមច្បាប់ទីពីរញូតុន គេបាន $F=ma$ ដែល a ជាសំទុះនៃចលនារបស់វត្ថុឋិតក្នុងមជ្ឈដ្ឋានមានកំលាំងកកិត F_r ដែល F_r សមមាត្រនឹង10ដងនៃល្បឿនដែលមាននៅខណ:នោះគេបាន $F_r=10v$ ។

តាមច្បាប់ទីពីរញូតុននឹងច្បាប់ហុកគេបានទំនាក់ទំនង $ma=-kx-10v$ ដែល k ជាមេគុណថេរកំរាញនិង x ជាប្រវែងសាច់លូតនៃរឺសរ។

គេបាន $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-10v$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+16x+10\frac{dx}{dt}=0 \Leftrightarrow x''+10x'+16x=0$$

ឬ $x''+10x'+16x=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2+10\lambda+16=0$

$$\Rightarrow \Delta'=25-16=9$$
$$\Rightarrow \lambda_1=-5-3=-8$$
$$\lambda_2=-5+3=-2$$
$$\Rightarrow x=Ae^{-2t}+Be^{-8t}$$

តាមលក្ខខណ្ឌ $x(0)=-1$, $x'(0)=0$ គេបាន $A+B=-1$ និង $x'=-2Ae^{-2x}-8Be^{-8x}$

នោះ $-2A-8B=-12$

$\Rightarrow A=-\frac{4}{3}$, $B=\frac{1}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{x=-\frac{4}{3}e^{-2x}+\frac{1}{3}e^{-8x}}$

ខ. គេលែងម៉ាស់ឲ្យចេញពីចំណុចនៅខាងក្រោមទីតាំង លំនឹងប្រវែង 1m ដោយឲ្យល្បឿនរត់លើងលើ $12m/s$

តាមសំនួរក. $x(t)=Ae^{-2t}+Be^{-8t}$

ដោយ $x(0)=-1$, $x'(0)=-12$

- $x(0)=-1\Rightarrow A+B=-1$ (1)
- $x'=-2Ae^{-2x}-8Be^{-8x}$ ដោយ $x'(0)=-12$

$\Rightarrow -2A-8B=-12$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន

$$\begin{cases} A+B=-1 \\ -2A-8B=-12 \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} 2A+2B=-2 \\ -2A-8B=-12 \end{cases}$$

$$-6B=-14 \Rightarrow B=\frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow A=-1-B=-1-\frac{7}{3}=-\frac{10}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{x=-\frac{10}{3}e^{-2x}+\frac{7}{3}e^{-8x}}$