មេរៀនទី១: ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

ដំណោះស្រាយលំហាត់

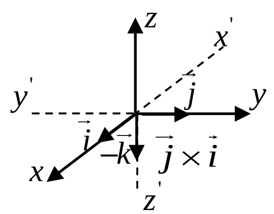
១.រកផលគុណនៃវ៉ិចទ័រឯកតារួចគូសរូបតាង

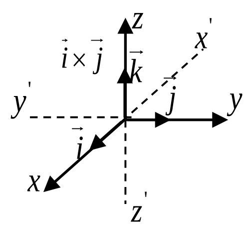
ក. $\vec{j}\times\vec{i}$ ខ. $\vec{i}\times\vec{j}$ គ. $\vec{j}\times\vec{k}$ ឃ. $\vec{k}\times\vec{j}$ ង. $\vec{i}\times\vec{k}$

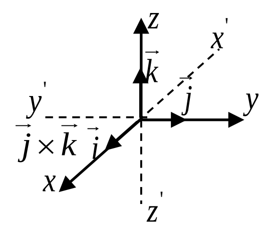
ច. $\vec{k}\times\vec{i}$ ។

រកផលគុណនៃវ៉ិចទ័រឯកតារួចគូសរូបតាង

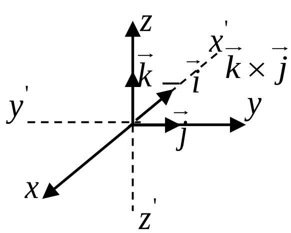
ក. $\vec{j}\times\vec{i}=-\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)=-\vec{k}$ ខ. $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ គ. $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$

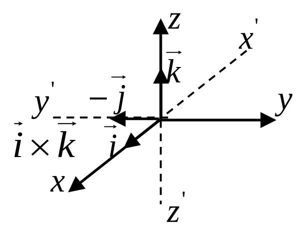


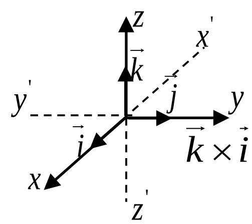




ឃ. $\vec{k}\times\vec{j}=-\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)=-\vec{i}$ ង. $\vec{i}\times\vec{k}=-\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)=-\vec{j}$ ច. $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$







២.រក $\vec{u}\times\vec{v}$ ហើយបង្ហាញថា $\vec{u}\times\vec{v}$ អត្តូកូណាល់នឹង $\vec{u}$ ផង និង $\vec{v}$ ផងក្នុងករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោមនេះ :

ក. $\vec{u}=(2,\ -3,\ 1)$, $\vec{v}=(1,\ -2,\ 1)$

ខ. $\vec{u}=(-1,\ 1,\ 2)$, $\vec{v}=(0,\ 1,\ 0)$

គ. $\vec{u}=(-1,\ 1,\ 2)$, $\vec{v}=(0,\ 1,\ 0)$

ឃ. $\vec{u}=(-10,\ 0,\ 6)$, $\vec{v}=(7,\ 0,\ 0)$

ង. $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

ច. $\vec{u}=\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ ។

រក $\vec{u}\times\vec{v}$ ហើយបង្ហាញថា $\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់នឹង $\vec{u}$ ផង និង $\vec{v}$ ផងក្នុងករណីនីមួយៗ ដូចខាងក្រោមនេះ:

ក. $\vec{u}=(2,\ \ -3,\ \ 1), \vec{v}=(1,\ \ -2,\ \ 1)$

$$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=(-3+2)\vec{i}-(2-1)\vec{j}+(-4+3)\vec{k}$$

$$(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{u}=(-1).2+(-1)(-3)+(-1).1=0$$

ដូច្នេះ $\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់នឹង $\vec{u}$

$$(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{v}=(-1).1+(-1)(-2)+(-1)1=0$$

ដូច្នេះ $\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់នឹង $\vec{v}$

> សន្និដ្ឋាន: $\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់នឹង $\vec{u}$ ផង $\vec{v}$ ផង៕

ខ. $\vec{u}=(-1,1,2)$, $\vec{v}(0,1,0)$

$$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}-\vec{k}$$

$$(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{u}=(-2).(-1)+(-1).2=0$$

គេបាន $\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់នឹង $\vec{u}$

$$(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{v}=(-2).0+0(1)+(-1)0=0$$

គេបាន $\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់នឹង $\vec{v}$

> សន្និដ្ឋាន: $\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់នឹង $\vec{u}$ ផង $\vec{v}$ ផង៕

គ. $\vec{u}=(12,-3,0)$, $\vec{v}=(-2,5,0)$

$$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 12 & -3 & 0\\ -2 & 5 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 5 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}12 & 0\\ -2 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}12 & -3\\ -2 & 5\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=54\vec{k}$$

$$(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{u}=0(12)+0(-3)+54(0)=0$$

$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}$ អត្តកូណាល់នឹង $\vec{u}$

$$(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{v}=0(-2)+0(5)+54(0)=0$$

$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}$ អត្តកូណាល់នឹង $\vec{u}$

សន្និដ្ឋាន: $\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់នឹង $\vec{u}$ ផង $\vec{v}$ ផង៕

ឃ. $\vec{u}=(-10,0,6)$, $\vec{v}(7,0,0)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -10 & 0 & 6\\ 7 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 6\\ 0 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-10 & 6\\ 7 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-10 & 0\\ 7 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=0\vec{i}+42\vec{j}+0\vec{k}=42\vec{j}$$

$$(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{v}=0(10)+42(0)+0(6)=0$$

$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}$ អត្តកូណាល់នឹង $\vec{u}$

$$(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{v}=0(7)+42(0)+0(0)=0$$

$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}$ អត្តកូណាល់នឹង $\vec{v}$

សន្និដ្ឋាន: $\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់នឹង $\vec{u}$ ផង $\vec{v}$ ផង៕

ង. $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\left(-1-1\right)\vec{i}-\left(-1-2\right)\vec{j}+\left(1-2\right)\vec{k}=-2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$$

$$\left(\vec{u}\times\vec{v}\right).\vec{u}=-2(1)+3(1)+(-1)(1)=0$$

$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}$ អត្តូកូណាល់នឹង $\vec{u}$

$$\left(\vec{u}\times\vec{v}\right).\vec{v}=(-2)2+3+(-1)(-1)=0$$

$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}$ អត្តូកូណាល់នឹង $\vec{v}$

សន្និដ្ឋាន: $\vec{u}\times\vec{v}$ អរត្តូកូណាល់នឹង $\vec{u}$ ផង $\vec{v}$ ផង។

ច. $\vec{u}=\vec{j}+6\vec{k}, \vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 6\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 6\\ -2 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 6\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(1+12)\vec{i}-(-6)\vec{j}+(-1)\vec{k}=13\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k}$$

$$\left(\vec{u}\times\vec{v}\right).\vec{u}=13(0)+6+(-1)6=0$$

$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}$ អត្តូកូណាល់នឹង $\vec{u}$

$$\left(\vec{u}\times\vec{v}\right).\vec{v}=13(1)+6(-2)+(-1)1=0$$

$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}$ អត្តូកូណាល់នឹង $\vec{v}$

សន្និដ្ឋាន: $\vec{u}\times\vec{v}$ អរត្តូកូណាល់នឹង $\vec{u}$ ផង $\vec{v}$ ផង។

៣.រក $\vec{u}\times\vec{v}$ និងរកវ៉ិចទ័រឯកតា ដែលអត្តូកូណាល់ទៅនិងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ផងនិង $\vec{v}$ ផងក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម:

ក. $\vec{u}=(4, 3.5, 7)$, $\vec{v}=(-1, 8, 4)$

ខ. $\vec{u}=(-8, -6, 4)$, $\vec{v}=(10, -12, -2)$

គ. $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{3}{4}\vec{j}+\frac{1}{10}\vec{k}$

ឃ. $\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{k}$, $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}+6\vec{j}$ ។

ក. $\vec{u}=(4,\,3.5,\,7)$, $\vec{v}=(-1,\,8,\,4)$

$$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -3.5 & 7\\ -1 & 8 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3.5 & 7\\ 8 & 4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & 7\\ -1 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & -3.5\\ -1 & 8\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-14-56)\vec{i}-(16+7)\vec{j}+(32-3.5)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}\times\vec{v}=-70\vec{i}-23\vec{j}+28.5\vec{k}}$$

តាង $\vec{p}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតានៃ $\vec{u}\times\vec{v}$ ដែលអត្ដកូណាល់នឹង $\vec{u}$ ផងនិង $\vec{v}$ ផង

$$\Rightarrow \vec{p}=\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{-70\vec{i}-23\vec{j}+28.5\vec{k}}{\sqrt{(-70)^2+(-23)^2+(28.5)^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p}=-\frac{70}{\sqrt{6241.25}}\vec{i}-\frac{23}{\sqrt{6241.25}}\vec{j}+\frac{28.5}{\sqrt{6241.25}}\vec{k}}$$

ខ. $\vec{u}=(-8,\,-6,\,4)$, $\vec{v}=(10,\,-12,\,-2)$

$$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -8 & -6 & 4\\ 10 & -12 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6 & 4\\ -12 & -2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-8 & 4\\ 10 & -2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-8 & -6\\ 10 & -12\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(12+48)\vec{i}-(16-40)\vec{j}+(96+60)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}\times\vec{v}=60\vec{i}+24\vec{j}+156\vec{k}}$$

តាង $\vec{p}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតានៃ $\vec{u}\times\vec{v}$ ដែលអត្ដកូណាល់នឹង $\vec{u}$ ផងនិង $\vec{v}$ ផង

$$\Rightarrow \vec{p}=\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{60\vec{i}+24\vec{j}+156\vec{k}}{\sqrt{(60)^2+(24)^2+(156)^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p}=\frac{60}{\sqrt{28512}}\vec{i}+\frac{24}{\sqrt{28512}}\vec{j}+\frac{156}{\sqrt{28512}}\vec{k}}$$

គ. $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{3}{4}\vec{j}+\frac{1}{10}\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 2 & -5\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{10}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -5\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{10}\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-3 & -5\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10}\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-3 & 2\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\left(\frac{1}{5}-\frac{15}{4}\right)\vec{i}-\left(-\frac{3}{10}+\frac{5}{2}\right)\vec{j}+\left(\frac{9}{4}-1\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}\times\vec{v}=-\frac{71}{20}\vec{i}-\frac{11}{5}\vec{j}+\frac{5}{4}\vec{k}}$$

តាង $\vec{p}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតានៃ $\vec{u}\times\vec{v}$ ដែលអត្កូកូណាល់នឹង $\vec{u}$ ផងនិង $\vec{v}$ ផង

$$\Rightarrow \vec{p}=\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{-\frac{71}{20}\vec{i}-\frac{11}{5}\vec{j}+\frac{5}{4}\vec{k}}{\sqrt{\left(-\frac{71}{20}\right)^2+\left(-\frac{11}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{p}=\frac{-\frac{71}{20}\vec{i}-\frac{11}{5}\vec{j}+\frac{5}{4}\vec{k}}{\sqrt{\frac{5041}{400}+\frac{121}{25}+\frac{25}{16}}}=\frac{-\frac{71}{20}\vec{i}-\frac{11}{5}\vec{j}+\frac{5}{4}\vec{k}}{\sqrt{\frac{5041+1936+625}{400}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p}=-\frac{71}{\sqrt{7602}}\vec{i}-\frac{44}{\sqrt{7602}}\vec{j}+\frac{25}{\sqrt{7602}}\vec{k}}$$

ឃ. $\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{k}$, $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}+6\vec{j}$

$$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & 6 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \frac{2}{3}\\ 6 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{2} & 6\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}\times\vec{v}=-4\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}}$$

តាង $\vec{p}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតានៃ $\vec{u}\times\vec{v}$ ដែលអត្កូកូណាល់នឹង $\vec{u}$ ផងនិង $\vec{v}$ ផង

$$\Rightarrow \vec{p} = \frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|} = \frac{-4\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}}{\sqrt{(-4)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{-4\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}}{\sqrt{16 + \frac{1}{9}}} = \frac{-4\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}}{\frac{\sqrt{145}}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = -\frac{12}{\sqrt{145}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{145}}\vec{j}}$$

៩.រកក្រលាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាមដែលមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាជ្រុងជាប់ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោមនេះ:

ក. $\vec{u} = \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$

ខ. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$

គ. $\vec{u} = (3,2,-1)$, $\vec{v} = (1,2,3)$

ឃ. $\vec{u} = (2,-1,0)$, $\vec{v} = (-1,2,0)$

តាង S ជាក្រលាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម

ក. $\vec{u} = \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = \vec{i}$$

$\Rightarrow S = |\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{1^2} = \boxed{1}$ ឯកតាផ្ទៃ

ខ. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (1-1)\vec{i} - (1)\vec{j} + (1)\vec{k} = -\vec{j} + \vec{k}$$

$\Rightarrow S = |\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \boxed{\sqrt{2}}$ ឯកតាផ្ទៃ

គ. $\vec{u} = (3,2,-1)$, $\vec{v} = (1,2,3)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$=(6+2)\vec{i}-(9+1)\vec{j}+(6-2)\vec{k}=8\vec{i}-10\vec{j}+4\vec{k}$

$\Rightarrow S=\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\sqrt{(8)^2+(-10)^2+(4)^2}=\sqrt{180}=\boxed{6\sqrt{5}}$ ឯកតាផ្ទៃ

ឃ. $\vec{u}=(2,-1,0)$, $\vec{v}=(-1,2,0)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$=0\vec{i}+0\vec{j}+3\vec{k}$

$\Rightarrow S=\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\sqrt{3^2}=\boxed{3}$ ឯកតាផ្ទៃ

៥.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំណុចខាងក្រោម ជាកំពូលរបស់ប្រលេឡូក្រាមរួចរកផ្ទៃក្រឡា៖

ក. $(1,1,1)$, $(2,3,4)$, $(6,5,2)$, $(7,7,5)$

ខ. $(2,-1,1)$, $(5,1,4)$, $(0,1,1)$, $(3,3,4)$

តាង S ជាក្រលាផ្ទៃរបស់ប្រលេឡូក្រាម

ក. $(1,1,1)$, $(2,3,4)$, $(6,5,2)$, $(7,7,5)$

ដោយតាង $A(1,1,1),B(2,3,4),C(6,5,2),D(7,7,5)$

$\overrightarrow{AB}=(2-1,3-1,4-1)=(1,2,3)$

$\overrightarrow{CD}=(7-6,7-5,5-2)=(1,2,3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow ABCD$ ជាកំពូលរបស់ប្រលេឡូក្រាម

យក $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ជាជ្រុងជាប់

$\Rightarrow S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

តែ $\overrightarrow{AB}=(1,2,3),\overrightarrow{AC}=(5,4,1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}\vec{k}$$

$=-10\vec{i}+14\vec{j}-6\vec{k}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-10)^2+(14)^2+(-6)2}=\sqrt{332}$

$\Rightarrow S=\sqrt{332}=\boxed{2\sqrt{83}}$ ឯកតាផ្ទៃ

ខ. $(2,-1,1)$, $(5,1,4)$, $(0,1,1)$, $(3,3,4)$

ដោយតាង $A(2,-1,1),B(5,1,4),C(0,1,1),D(3,3,4)$

$\overrightarrow{AB}=(5-2,1+1,4-1)=(3,2,3)$

$\overrightarrow{CD}=(3-0,3-1,4-1)=(3,2,3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow ABCD$ ជាកំពូលរបស់ប្រលេឡូក្រាម

យក $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ជាជ្រុងជាប់

$\Rightarrow S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

តែ $\overrightarrow{AB}=(3,2,3),\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & 3\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & 3\\ -2 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$=-6\vec{i}-6\vec{j}+10\vec{k}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+(10)^2}=\sqrt{172}=2\sqrt{43}$

$\Rightarrow S=\boxed{2\sqrt{43}}$ ឯកតាផ្ទៃ

៦.រកក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ ដែលមានកំពូលដូចខាងក្រោម:

ក. $(0,0,0),(1,2,3),(-3,0,0)$

ខ. $(2,-3,4),(0,1,2),(-1,2,0)$

គ. $(1,3,5,),(3,3,0),(-2,0,5)$

ឃ. $(1,2,0),(-2,1,0),(0,0,0)$

តាង S ជាក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ

ក. $(0,0,0),(1,2,3),(-3,0,0)$

ដោយតាង $A(0,0,0),B(1,2,3),C(-3,0,0)$

$$\overrightarrow{AB}=(1,2,3),\overrightarrow{AC}=(-3,0,0)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&3\\-3&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3\\0&0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&3\\-3&0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&2\\-3&0\end{vmatrix}\vec{k}\qquad=0\vec{i}-9\vec{j}+6\vec{k}$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-9)^2+6^2}=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\boxed{\frac{3}{2}\sqrt{13}}$$ ឯកតាផ្ទៃ

ខ. $(2,-3,4),(0,1,2),(-1,2,0)$ ដោយតាង

$A(2,-3,4),B(0,1,2),C(-1,2,0)$

$$\overrightarrow{AB}=(0-2,1+3,2-4)=(-2,4,-2)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-1-2,2+3,0-4)=(-3,5,-4)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&4&-2\\-3&5&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-2\\5&-4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2&-2\\-3&-4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2&4\\-3&5\end{vmatrix}\vec{k}\qquad=-6\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-6)^2+(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\boxed{\sqrt{11}}$$ ឯកតាផ្ទៃ

គ. $(1,3,5,),(3,3,0),(-2,0,5)$ ដោយតាង

$A(1,3,5),B(3,3,0),C(-2,0,5)$

$$\overrightarrow{AB}=(3-1,3-3,0-5)=(2,0,-5)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-2-1,0-3,5-5)=(-3,-3,0)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&0&-5\\-3&-3&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-5\\-3&0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&-5\\-3&0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&0\\-3&-3\end{vmatrix}\vec{k}$$

$= -15\vec{i} + 15\vec{j} - 6\vec{k}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-15)^2+(15)^2+(-6)^2} = \sqrt{486} = 9\sqrt{6}$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \boxed{\frac{9}{2}\sqrt{6}}$ ឯកតាផ្ទៃ

ឃ. $(1,2,0),(-2,1,0),(0,0,0)$

ដោយតាង $A(1,2,0), B(-2,1,0), C(0,0,0)$

$\overrightarrow{AB} = (-2-1, 1-2, 0) = (-3,-1,0)$

$\overrightarrow{AC} = (-1,-2,0)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1 & 0\\ -2 & 0\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}-3 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}-3 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}\vec{k} = 5\vec{k}$$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{5^2} = 5$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \boxed{\frac{5}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃ

៧.រក $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោមនេះ:

ក. $\vec{u} = \vec{i}, \vec{v} = \vec{j}, \vec{w} = \vec{k}$

ខ. $\vec{u} = (1,1,1), \vec{v} = (2,1,0), \vec{w} = (0,0,1)$

គ. $\vec{u} = (2,0,1), \vec{v} = (0,3,0), \vec{w} = (0,0,1)$

ឃ. $\vec{u} = (2,0,0), \vec{v} = (1,1,1), \vec{w} = (0,2,2)$

ក. $\vec{u} = \vec{i}, \vec{v} = \vec{j}, \vec{w} = \vec{k}$

ដោយ $\vec{v}\times\vec{w} = \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$

$\Rightarrow \vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{i}).(\vec{i}) = \boxed{1}$

ខ. $\vec{u} = (1,1,1), \vec{v} = (2,1,0), \vec{w} = (0,0,1)$

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$$

$= \vec{i} - 2\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = 1(1)+1(-2)+1(0) = \boxed{-1}$

គ. $\vec{u}=(2,0,1), \vec{v}=(0,3,0), \vec{w}=(0,0,1)$

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$= 3\vec{i}$

$\Rightarrow \vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = 2(3)+0+1(0) = \boxed{6}$

ឃ. $\vec{u}=(2,0,0), \vec{v}=(1,1,1), \vec{w}=(0,2,2)$

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$= -2\vec{j} + 2\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = 2(0)+0(-2)+0(2) = \boxed{0}$

៨.ដោយប្រើផលគុណចំរុះនៃបីវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ចូរគណនាមាឌប្រលេពីប៉ែតកែង ដែលមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}, \vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាជ្រុងជាប់ដូចខាងក្រោម:

ក. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$

ខ. $\vec{u} = (1,3,1)$, $\vec{v} = (0,5,5)$, $\vec{w} = (4,0,4)$

តាង V ជាមាឌប្រលេពីប៉ែតកែង

ក. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$= \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$\Rightarrow V = |\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})| = |1(1)+1(1)+0(-1)| = |2| = \boxed{2}$ ឯកតាមាឌ

ខ. $\vec{u}=(1,3,1)$, $\vec{v}=(0,5,5)$, $\vec{w}=(4,0,4)$

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 5 & 5\\ 4 & 0 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 5\\ 0 & 4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 5\\ 4 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 5\\ 4 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=20\vec{i}+20\vec{j}+20\vec{k}$$

$\Rightarrow V=\left|\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})\right|=\left|1(20)+3(20)+1(20)\right|=|100|=\boxed{100}$ ឯកតាមាឌ

៩.រកមាឌប្រលេពីប៉ែតដែលមានកំពូលដូចខាង ក្រោម:

ក. $(0,0,0),(3,0,0),(0,5,1),(3,5,1),(2,0,5),(5,0,5)$

$(2,5,6),(5,5,6)$

ខ. $(0,0,0),(1,1,0),(1,0,2),(0,1,1),(2,1,2),(1,1,3)$

$(1,2,1),(2,2,3)$

ក. តាង

$A=(0,0,0),B=(3,0,0),C=(0,5,1),D=(3,5,1),$

$E=(2,0,5),F=(5,0,5),G=(2,5,6),H=(5,5,6)$

ដោយ

$$V=\left|\overrightarrow{AE}\times\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\right|$$

$\overrightarrow{AB}=(3,0,0),\overrightarrow{AC}=(0,5,1),\overrightarrow{AE}=(2,0,5)$

$$\overrightarrow{AE}\times\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}2 & 0 & 5\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 1\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}0 & 0\\ 5 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-0\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+5\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 5\end{vmatrix}\vec{k}=75$$

ដូចនេះ $V=75$ ឯកតាមាឌ

ខ.តាង $A(0,0,0),B(1,1,0),C(1,0,2),D(0,1,1),$

$E(2,1,2),F(1,1,3),G(1,2,1),H(2,2,3)$

យើងមាន

$$V=\left|\overrightarrow{AD}\times\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\right|$$

$$\overrightarrow{AB}=(1,1,0),\overrightarrow{AC}=(1,0,2),\overrightarrow{AD}=(0,1,1)$$

$$\overrightarrow{AD}\times\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&2\end{vmatrix}$$

$$=0\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\vec{i}-1\begin{vmatrix}1&0\\1&2\end{vmatrix}\vec{j}+1\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}\vec{k}=-3$$

ដូចនេះ $V=3$ ឯកតាមាឌ

មេរៀនទី២: អនុវត្តន៍នៃផលគុណវ៉ិចទ័រ

ដំណោះស្រាយលំហាត់

១.រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ដែលកាត់ តាមចំណុច ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសដូចខាងក្រោម:

ក. $A(0, 0, 0)$, $\vec{u} = (1, 2, 3)$

ខ. $B(0, 0, 0)$, $\vec{u} = \left(-2, \frac{5}{2}, 1\right)$

គ. $C(-2, 0, 3)$, $\vec{u} = \left(2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}\right)$

ឃ. $D(-2, 0, 3)$, $\vec{u} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$

ង. $P(1, 0, 1)$, $x = 3 + 3t, y = 5 - 2t, z = -7 + t$

ច. $Q(-3, 5, 4)$, $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = z - 3$

ក. $A(0, 0, 0)$, $\vec{u} = (1, 2, 3)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រគឺ: $\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + 2t \\ z = 0 + 3t \end{cases}, \left(t \in \mathbb{R}\right)$ ឬ $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}, \left(t \in \mathbb{R}\right)$

សមីការឆ្លុះគឺ: $\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-0}{3}$ ឬ $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$

ខ. $B(0, 0, 0)$, $\vec{u} = \left(-2, \frac{5}{2}, 1\right)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រគឺ: $\begin{cases} x = -2t \\ y = \frac{5}{2}t \\ z = t \end{cases}, \left(t \in \mathbb{R}\right)$

សមីការឆ្លុះគឺ: $\frac{x}{-2} = \frac{2y}{5} = z$

គ. $C(-2, 0, 3)$, $\vec{u} = \left(2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}\right)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រគឺ: $\begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 3t \\ z = 3 \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$

សមីការឆ្លុះគឺ: $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{-2}$

ឃ. $D(-2, 0, 3)$, $\vec{u} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រគឺ: $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$

ដោយវិុចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (6, 3, 0)$ ដូចនេះគ្មានសមីការឆ្លុះទេ។

ង. $P(1, 0, 1)$, $x = 3 + 3t, y = 5 - 2t, z = -7 + t$

គេមានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ: $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 5 - 2t \\ z = -7 + t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow \vec{u} = (3, -2, 1)$ ជាវិុចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់

$\Rightarrow$ សមីការឆ្លុះគឺ: $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} = z - 1$

ច. $Q(-3, 5, 4)$, $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = z - 3$

គេមាន $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = z - 3$ ជាសមីការឆ្លុះរបស់បន្ទាត់

$\Rightarrow \vec{u} = (3, -2, 1)$ ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់

$\Rightarrow$ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រគឺ: $\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 5 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$

២.រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនិងសមីការឆ្លុះដែលកាត់តាមពីរចំណុចខាងក្រោម:

ក. $A(5, -3, 2)$, $B\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{2}, 1\right)$

ខ. $P(1, 0, 1)$, $Q(1, 3, -2)$ ។

ក. $A(5,-3,2)$, $B\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{2},1\right)$វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់កាត់តាម A

និង Bគឺ: $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{2}{3}-5,1+3,1-2\right)=\left(-\frac{17}{3},4,-1\right)$

$\Rightarrow$ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច A និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AB}$ គឺ:

$$\begin{cases} x=5-\frac{17}{3}t \\ y=-3+4t,(t\in\mathbb{R}) \\ z=2-t \end{cases}$$

សមីការឆ្លុះគឺ: $\frac{-3x+15}{17}=\frac{y+3}{4}=2-z$

ខ. $P(1,0,1)$, $Q(1,3,-2)$

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់កាត់តាមP និង Qគឺ:

$\overrightarrow{PQ}=(1-1,3-0,-2-1)=(0,3,-3)$

$\Rightarrow$ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់កាត់តាមចំណុចP និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស$\overrightarrow{PQ}$គឺ:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=3t \quad ,(t\in\mathbb{R}) \\ z=1-3t \end{cases}$$

ដោយវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស$\overrightarrow{PQ}=(0,3,-3)$ដូចនេះគ្មានសមីការឆ្លុះទេ។

៣.រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់៖

ក. កាត់តាមចំណុច $A(2,3,4)$ ហើយស្របទៅនឹង ប្លង់ xoz និងប្លង់ yoz ។

ខ. កាត់តាមចំណុច $P(2,3,4)$ ហើយកែងទៅនឹង ប្លង់$3x+2y-z=6$ ។

ក. តាង$\vec{n}_1$ ជាវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់របស់ប្លង់ $xoz \Rightarrow \vec{n}_1=\vec{j}$

តាង$\vec{n}_2$ជាវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់របស់ប្លង់ $yoz \Rightarrow \vec{n}_2=\vec{i}$ តាង$\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់

ដោយ$\vec{u}$ ស្របទៅនឹងប្លង់ xoz និងប្លង់ yoz $\Rightarrow \vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{i}\times\vec{j}=-\vec{k}$

$\Rightarrow$ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $A(2,3,4)$

ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$ គឺ: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \quad ,(t \in \mathbb{R}) \\ z = 4 + 2t \end{cases}$

ខ. តាង $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់របស់ប្លង់ $3x + 2y - z = 6 \Rightarrow \vec{n} = (3, 2, -1)$

ដោយបន្ទាត់កែងទៅនឹងប្លង់ $3x + 2y - z = 6$

$\Rightarrow \vec{u} = \vec{n} = (3, 2, -1)$

$\Rightarrow$ សមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $P(2, 3, 4)$ ហើយកែងទៅនឹង ប្លង់ $3x + 2y - z = 6$ គឺ:

$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 2t ,(t \in \mathbb{R}) \\ z = 4 - t \end{cases}$

៤.រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដូចខាងក្រោម:

ក. បន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុចហើយស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v} = 4\vec{i} - \vec{k}$

$(i).(2, 3, 0)$ $(ii).(-6, 3, 2)$ $(iii).(2, 1, 0)$ $(iv).(6, 3, -2)$

ខ. បន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច ហើយស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (2, 2, 1)$

$(i).(4, 1, -2)$ $(ii).\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$ $(iii).(2, 3, 4)$

គ.បន្ទាត់ L ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ពីរដូចខាងក្រោម:

$\alpha_1 : x - 3y + 4z = 10$ និង $\alpha_2 : 2x - y + z + 1 = 0$

$\alpha_1 : 3x + 2y - z = 7$ និង $\alpha_2 : 5x + y - z = 4$

ក. (i).សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច

$(2, 3, 0)$ ហើយស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v} = 4\vec{i} - \vec{k}$ គឺ: $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 3 \quad ,(t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$

(ii). សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $(-6, 3, 2)$ ហើយស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រ

$\vec{v} = 4\vec{i} - \vec{k}$ គឺ: $\begin{cases} x = -6 + 4t \\ y = 3 \quad ,(t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - t \end{cases}$

(iii). សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $(2,1,0)$ ហើយស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រ

$\vec{v} = 4\vec{i} - \vec{k}$ គឺ: $\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1 \quad ,(t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$

(iv). សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រលនៃបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $(6, 3, -2)$ ហើយស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រ

$\vec{v} = 4\vec{i} - \vec{k}$ គឺ: $\begin{cases} x = 6+4t \\ y = 3 \quad ,(t \in \mathbb{R}) \\ z = -2-t \end{cases}$

ខ. (i). សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $(4,1,-2)$ ហើយស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រ

$\vec{u} = (2,\ 2,\ 1)$ គឺ: $\begin{cases} x = 4+2t \\ y = 1+2t \ ,(t \in \mathbb{R}) \\ z = -2+t \end{cases}$

(ii). សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$ ហើយស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រ

$\vec{u} = (2,\ 2,\ 1)$ គឺ: $\begin{cases} x = \dfrac{5}{2}+2t \\ y = \dfrac{1}{2}+2t \ ,(t \in \mathbb{R}) \\ z = -\dfrac{11}{4}+t \end{cases}$

(iii). សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $(2, 3, 4)$ ហើយស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រ

$\vec{u} = (2,\ 2,\ 1)$ គឺ: $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3+2t \ ,(t \in \mathbb{R}) \\ z = 4+t \end{cases}$

គ. សមីការបន្ទាត់ L ដែលជាប្រសព្វរវាងប្លង់ពីរ:

$\alpha_1 : x-3y+4z=10$ និង $\alpha_2 : 2x-y+z+1=0$

$L: \begin{cases} x-3y+4z=10 \\ 2x-y+z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y+4z=10 & (1) \\ 2x-y+z=-1 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y+4z=10 & (3) \\ -8x+4y-4z=4 & (4) \end{cases}$

យក (2) គុណនឹង (-4)

$(3)+(4) \Rightarrow y = 14+7x$ ជួសក្នុង $(1) \Rightarrow z = 13+5x$

តាង $x=t\ ,\ t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលជាប្រសព្វរវាងប្លង់ $\alpha_1: x-3y+4z=10$ និង $\alpha_2: 2x-y+z+1=0$ គឺ: $\begin{cases} x=t \\ y=14+7t, (t\in\mathbb{R}) \\ z=13+5t \end{cases}$

$\alpha_1: 3x+2y-z+7$ និង $\alpha_2: 5x+y-z=4$

$$L:\begin{cases} 3x+2y-z=7 \\ 5x+y-z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y-z=7 & (1) \\ -5x-y+z=-4 & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2)\Rightarrow y=2x+3$ ជួសក្នុង $(2)\Rightarrow z=7x-1$

តាង $x=t\ ,\ t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលជាប្រសព្វរវាងប្លង់ $\alpha_1: 3x+2y-z+7$ និង $\alpha_2: 5x+y-z=4$ គឺ: $\begin{cases} x=t \\ y=2t+3, (t\in\mathbb{R}) \\ z=7t-1 \end{cases}$

៥.រកសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុចនិងមានវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់ដូចខាងក្រោម:

$A(2, 1, 2)$ $\quad \vec{n}=\vec{i}$

$B(1, 0, -3)$ $\quad \vec{n}=\vec{k}$

$C(3, 2, 2)$ $\quad \vec{n}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$

$D(0, 0, 0)$ $\quad \vec{n}=-3\vec{i}+2\vec{k}$

$E(0, 0, 6)x=1-t, y=2+t, z=4-2$

$F(3, 2, 2=)$ $\quad \dfrac{x-1}{4}=y+2=\dfrac{z+3}{-3}$

រកសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុចនិងមានវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់ដូចខាងក្រោម:

សមីការប្លង់ដែលកាត់តាម $A(2, 1, 2)$ និងមានវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់ $\vec{n}=\vec{i}$ គឺ:

$1(x-2)+0(y-1)+0(z-2)=0$ ឬ $\boxed{x=2}$

សមីការប្លង់ដែលកាត់តាម $B(1, 0, -3)$ និងមានវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់ $\vec{n}=\vec{k}$ គឺ:

$0(x-1)+0(y-0)+1(z+3)=0$ ឬ $\boxed{z=-3}$

សមីការប្លង់ដែលកាត់តាម $C(3, 2, 2)$ និងមានវ៉ិចទ័រណ័រម៉ាល់ $\vec{n} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ គឺ:

$2(x-3)+3(y-2)-1(z-2)=0$ ឬ $\boxed{2x+3y-z=10}$

សមីការប្លង់ដែលកាត់តាម $D(0, 0, 0)$ និងមានវ៉ិចទ័រណ័រម៉ាល់ $\vec{n} = -3\vec{i} + 2\vec{k}$ គឺ:

$\boxed{-3x+2z=0}$

$E(0, 0, 6)$ $\quad x=1-t, y=2+t, z=4-2t$

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណ័រម៉ាល់នៃប្លង់

ដោយវ៉ិចទ័រណ័រម៉ាល់នៃប្លង់ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃ បន្ទាត់ $x=1-t, y=2+t, z=4-2t$

$\Rightarrow \vec{n} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

$\Rightarrow$ សមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំនុច $E(0, 0, 6)$ និងមានវ៉ិចទ័រណ័រម៉ាល់

$\vec{n} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ គឺ: $-1(x-0)+1(y-0)-2(z-6)=0$ ឬ $\boxed{x-y+2z=12}$

$F(3, 2, 2)$ $\quad \dfrac{x-1}{4} = y+2 = \dfrac{z+3}{-3}$

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណ័រម៉ាល់នៃប្លង់

ដោយវ៉ិចទ័រណ័រម៉ាល់នៃប្លង់ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ $\dfrac{x-1}{4} = y+2 = \dfrac{z+3}{-3}$

$\Rightarrow \vec{n} = 4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

$\Rightarrow$ សមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $F(3, 2, 2)$ និងមាន វ៉ិចទ័រណ័រម៉ាល់ $\vec{n} = 4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ គឺ:

$4(x-3)+(y-2)-3(z-2)=0$ ឬ $\boxed{4x+y-3z=8}$

៦.រកសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុចដូចខាងក្រោម:

ក. $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 3)$ និង $C(-2, 3, 3)$

ខ. $A(1, 2, -3)$, $B(2, 3, 1)$ និង $C(0, -2, -1)$

គ. $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 1)$ និង $C(-1, -2, 2)$

ឃ. $A(2, 0, 0)$ និងស្របទៅនឹងប្លង់ yoz

ង. $A(1, 2, 3)$ និងស្របទៅនឹងប្លង់ xoz ។

ក. $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 3)$ និង $C(-2, 3, 3)$

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណ័រម៉ាល់នៃប្លង់

$\overrightarrow{AB}=(1, 2, 3)$, $\overrightarrow{AC}=(-2, 3, 3)$

$$\Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ -2 & 3 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-3\vec{i}-9\vec{j}+7\vec{k}$$

$\Rightarrow$ សមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(0, 0, 0)$ និងមានវ៉ិចទ័រណ័រម៉ាល់ $\vec{n}=-3\vec{i}-9\vec{j}+7\vec{k}$ គឺ:

$\boxed{-3x-9y+7z=0}$

ខ. $A(1, 2, -3)$, $B(2, 3, 1)$ និង $C(0, -2, -1)$

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណ័រម៉ាល់នៃប្លង់

$$\overrightarrow{AB}=(1, 1, 4)\ ,\ \overrightarrow{AC}=(-1, -4, 2)\Rightarrow \vec{n}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 4\\ -1 & -4 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 4\\ -4 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -4\end{vmatrix}\vec{k}=18\vec{i}-6\vec{j}-3\vec{k}$$

$\Rightarrow$ សមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(1, 2, -3)$ និងមានវ៉ិចទ័រណ័រម៉ាល់ $\vec{n}=18\vec{i}-6\vec{j}-3\vec{k}$

គឺ: $18(x-1)-6(y-2)-3(z+3)=0$ ឬ $\boxed{18x-6y-3z=15}$

គ. $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 1)$ និង $C(-1, -2, 2)$

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណ័រម៉ាល់នៃប្លង់

$\overrightarrow{AB}=(2, 0, -2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2, -4, -1)$

$$\Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & -2\\ -2 & -4 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -2\\ -4 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -2\\ -2 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ -2 & -4\end{vmatrix}\vec{k}=-8\vec{i}+6\vec{j}-8\vec{k}$$

$\Rightarrow$ សមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(1, 2, 3)$ និងមានវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់ $\vec{n} = -8\vec{i} + 6\vec{j} - 8\vec{k}$ គឺ:

$-8(x-1)+6(y-2)-8(z-3)=0$ ឬ $\boxed{-8x+6y-8z+20=0}$

ឃ. តាង (P) ជាប្លង់ដែលកាត់តាម $A(2, 0, 0)$ និងស្របទៅនឹងប្លង់ yoz

ដោយ $\begin{cases} yoz \perp \vec{i} \\ (P) \perp yoz \end{cases} \Rightarrow (P) \perp \vec{i}$

$\Rightarrow$ សមីការប្លង់ (P) គឺ: $\boxed{x=2}$

ង. តាង (P) ជាប្លង់ដែលកាត់តាម $A(1, 2, 3)$ និងស្របទៅនឹងប្លង់ xoz

ដោយ $\begin{cases} xoz \perp \vec{j} \\ (P) \perp xoz \end{cases} \Rightarrow (P) \perp \vec{j}$

$\Rightarrow$ សមីការប្លង់ (P) គឺ: $\boxed{y=2}$

៧.រកសមីការប្លង់ដែលកំនត់ដោយបន្ទាត់ $\frac{x-1}{-2} = y-4 = z$ និង $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$ ។

តាង P ជាប្លង់ដែលកំនត់ដោយបន្ទាត់ទាំងពីរនេះ

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់នៃប្លង់ P

បន្ទាត់ $\frac{x-1}{-2} = y-4 = z$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}_1 = (-2, 1, 1)$

បន្ទាត់ $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}_2 = (-3, 4, -1)$

$$\Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = -5\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}$$

ចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ទាំងពីរកំនត់ដោយ

$$\begin{cases}\begin{cases}x=1-2t\\ y=4+t\\ z=t\end{cases},(1)\\ \begin{cases}x=2-3t\\ y=1+4t\\ z=2-t\end{cases},(2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2t=2-3t\\ 4+t=1+4t\\ t=2-t\end{cases}\Leftrightarrow t=1$$

$\Rightarrow$ បន្ទាត់ទាំងពីរប្រសព្វគ្នាត្រង់ $t=1$ យក $t=1$ ជួស (1) ឬ (2) $\Rightarrow(-1,5,1)$ ជាចំណុចប្រសព្វរបស់បន្ទាត់ទាំងពីរ

$\Rightarrow$ សមីការប្លង់ P កាត់តាមចំណុច $(-1,5,1)$ និងមានវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់

$\vec{n}=-5\vec{i}-5\vec{j}-5\vec{k}$ គឺ: ឬ $\boxed{P: x+y+z-5=0}$

៨.រកសមីការប្លង់ដែលកំណត់ដោយចំណុច $A(2,2,1)$ និងបន្ទាត់ $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=z$ ។

P ជាប្លង់ដែលកំនត់

ដោយចំណុច $A(2,2,1)$ និងបន្ទាត់ $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=z$

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់នៃប្លង់ P,បន្ទាត់ $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=z$ ជាបន្ទាត់កាត់តា $B(0,4,0)$

និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(2,-1,1)$ $\overrightarrow{AB}=(-2,2,-1)$

$$\Rightarrow\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&2&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2&-1\\-1&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2&-1\\2&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2&2\\2&-1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\vec{i}-2\vec{k}$$

$\Rightarrow$ សមីការប្លង់ P ដែលកាត់តាមចំណុច $A(2,2,1)$ និងមានវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់

$\vec{n}=\vec{i}-2\vec{k}$ គឺ $(x-2)-2(z-1)=0$ ឬ $\boxed{P: x-2z=0}$

៩.រកមុំដែលផ្គុំឡើងដោយប្លង់ដូចខាងក្រោម:

ក. $5x-3y+z=4$, $x+4y+7z=1$

ខ. $3x+y-4z=3$, $-9x-3y+12z=4$

គ. $x-3y+6z=4$, $5x+y-z=4$ ។

រកមុំដែលផ្គុំឡើងដោយប្លង់ដូចខាងក្រោម:

ក. តាង θ ជាមុំរវាងប្លង់ $5x-3y+z=4$ និងប្លង់ $x+4y+7z=1$

ប្លង់ $5x-3y+z=4$ មានវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់ $\vec{n}_1=(5,-3,1)$

ប្លង់ $x+4y+7z=1$ មានវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់ $\vec{n}_2=(1,4,7)$

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{|5(1)-3(4)+1(7)|}{\sqrt{5^2+(-3)^2+1^2}\sqrt{1^2+4^2+7^2}}=0 \qquad \Rightarrow \boxed{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

ខ. តាង θ ជាមុំរវាងប្លង់ទាំងពីរ $3x+y-4z=3$ និងប្លង់ $-9x-3y+12z=4$

ប្លង់ $3x+y-4z=3$ មានវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់ $\vec{n}_1=(3,1,-4)$

ប្លង់ $-9x-3y+12z=4$ មានវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់ $\vec{n}_2=(-9,-3,12)$

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{|-27-3-48|}{\sqrt{3^2+1^2+(-4)^2}\sqrt{(-9)^2+(-3)^2+(12)^2}}$$

$$=1\Rightarrow \boxed{\theta=0}$$

គ. តាង θ ជាមុំរវាងប្លង់ $x-3y+6z=4$ និងប្លង់ $5x+y-z=4$

ប្លង់ $x-3y+6z=4$ មានវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់ $\vec{n}_1=(1,-3,6)$

ប្លង់ $5x+y-z=4$ មានវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់ $\vec{n}_2=(5,1,-1)$

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{|5-3-6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+6^2}\sqrt{5^2+1^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{46}\sqrt{27}}=0.11350087$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta=1.4570050rad=0.25430325^\circ}$$

១០.រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ដូច ខាងក្រោម:

ក. $3x+2y-z=7$, $x-4y+2z=0$

ខ. $x-3y+6z=4$, $5x+y-z=4$

ក. តាង (L) ជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ $3x+2y-z=7$ និង $3x+2y-z=7$

$$\Rightarrow (L):\begin{cases}3x+2y-z=7\\ x-4y+2z=0\end{cases} \Leftrightarrow (L):\begin{cases}6x+4y-2z=14 & (1)\\ x-4y+2z=0 & (2)\end{cases}$$

$(1)+(2)\Rightarrow x=2$ ជួសក្នុង (1) និង (2)

$$\Rightarrow (L):\begin{cases}x=2\\ 4y-2z=2 \ (3)\\ -4y+2z=-2 \quad (4)\end{cases}$$

តែ (3) និង (4) ជាសមីការតែមួយតាម $(3)\Rightarrow y=2+2z$ ， តាង $z=t$

$$\Rightarrow \text{សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ បន្ទាត់}(L)\text{គឺ}:\begin{cases}x=2\\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t,(t\in\mathbb{R})\\ z=t\end{cases}$$

ខ. តាង (L) ជាបន្ទាត្រ់បសព្វរវាងប្លង់ $x-3y+6z=4$ និង ប្លង់ $5x+y-z=4$

$$\Rightarrow (L):\begin{cases}x-3y+6=4\\ 5x+y-z=4\end{cases} \Leftrightarrow (L):\begin{cases}x-3y+6=4 & (1)\\ 15x+3y-3z=12 & (2)\end{cases}$$

$(1)+(2)\Rightarrow z=\dfrac{16-16x}{3}$ ជួសក្នុង (2)

$\Rightarrow y=\dfrac{28-31x}{3}$ ， តាង $x=t$

$$\Rightarrow \text{សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ បន្ទាត់}(L)\text{គឺ}:\begin{cases}x=t\\ y=\frac{28}{3}-\frac{31}{3}t,\ (t\in\mathbb{R})\\ z=\frac{16}{3}-\frac{16}{3}t\end{cases}$$

១១.រកចំងាយរវាងចំណុច និងបន្ទាត់ដូចខាងក្រោម:

ក. $(10, 3, -2)$, $x = 4t - 2$, $y = 3$, $z = -t + 1$

ខ. $(4, 1, -2)$, $x = 2t + 2$, $y = 2t$, $z = t - 3$

ក. តាង D ជាចម្ងាយពីរចំណុចទៅបន្ទាត់

តាង $Q = (10, 3, -2)$ និង $(L): \begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = 3 \quad ,(t \in \mathbb{R}) \\ z = -t + 1 \end{cases}$

(L) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (4, 0, -1)$

$t = 0 \Rightarrow P(-2, 3, 1) \in (L)$

$\overrightarrow{PQ} = (-12, 3, 1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -12 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow D = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}\right|}{|\vec{u}|} = 0$$

ដូចនេះ $\boxed{D = 0}$

ខ. តាង D ជាចម្ងាយពីចំណុចទៅបន្ទាត់

តាង $Q = (4, 1, -2)$ និង $(L): \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = 2t \\ z = t - 3 \end{cases}$

(L) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (2, 2, 1)$

យក $t = 0 \Rightarrow P(2, 0, -3) \in (L)$

$\overrightarrow{PQ} = (2, 1, 1)$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{k}$$

$$\Rightarrow D = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{D=\frac{\sqrt{5}}{3}}$

១២.ក្នុងចតុមុខនិយ័ត $OABC$ តាង E ជាចំណុចកណ្តាលនៃ ជ្រុង $[AB]$, F និង P ចែកក្នុង $[OC]$ និង $[OA]$ តាមផល ធៀប $\frac{FO}{FC}=\frac{2}{1}$ និង $\frac{PO}{OA}=\frac{1}{2}$។ ចំពោះចំណុច Q នៅលើជ្រុង $[BC]$ យក $\overrightarrow{BQ}=t\overrightarrow{BC}$។ បើ $[PQ]$ ប្រសព្វជាមួយនឹង $[EF]$ កំណត់តំលៃ t។

តាង $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ និង $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$

តាង X ជាចំណុចប្រសព្វរវាង $[EF]$ និង $[PQ]$

ដោយ X នៅលើបន្ទាត់ EF ផងនិងនៅលើ PQ ផង គេបាន:

$\overrightarrow{OX}=K\overrightarrow{OE}+(1-K)\overrightarrow{OF}\ (1)$

$\overrightarrow{OX}=\ell\overrightarrow{OP}+(1-\ell)\overrightarrow{OQ}\quad (2)$

$0\prec K,\ell\prec 1$

តាម $(1)\Rightarrow \overrightarrow{OX}=k\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}}{2}+(1-k)\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}=k\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+(1-k)\frac{2}{3}\vec{c}\,(3)$

តាម (2)

$$\Rightarrow \overrightarrow{OX}=\ell\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+(1-\ell)\left[(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}\right]$$

$$=\frac{\ell}{2}\vec{a}+(1-\ell)(1-t)\vec{b}+t(1-\ell)\vec{c}\quad (4)$$

ដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a},\vec{b}$ និង $\vec{c}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែ

នោះតាម (3) និង (4) គេបាន:

$$\begin{cases}\frac{\ell}{2}=\frac{k}{2} & (1)\\ (1-\ell)(1-t)=\frac{k}{2} & (2)\\ t(1-\ell)=\frac{2(1-k)}{3} & (3)\end{cases}$$

$(1)\Rightarrow k=\ell$ ជួសក្នុង (2) និង (3) គេបាន:

$$\begin{cases} (1-\ell)(1-k)=\dfrac{\ell}{2} & (5) \\ t(1-\ell)=\dfrac{2(1-\ell)}{3} & (6) \end{cases}$$

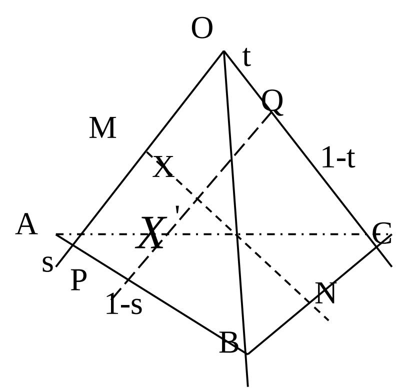
$(6)\Rightarrow t=\dfrac{2}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{t=\dfrac{2}{3}}$

១១. ឧបមាថា4ចំណុចផ្សេងគ្នា O,A,B និងCមិននៅក្នុង ប្លង់តែមួយ ហើយចំនួនពិតs និងt បំពេញលក្ខខណ្ឌ $0<s<1$ និង$0<t<1$។ តាងM និង N ជាចំណុច កណ្តាលនៃអង្កត់$[OA]$ និង $[BC]$ រៀងគ្នា តាងP និងQ ជាចំណុចដែលចែកអង្កត់$[AB]$និង$[OC]$ ខាងក្នុងតាមផលធៀប s លើ $1-s$ និង t លើ $1-t$ រៀងគ្នា។

ក. យក$\overrightarrow{OR}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$។ បង្ហាញថាបើ$\alpha+\beta=\dfrac{1}{2}$ និង$\beta=\gamma$ នោះចំណុចR នៅលើ បន្ទាត់ MN ។

ខ. រកលក្ខខណ្ឌចាំបាច់និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីអោយ MN ប្រសព្វនឹង PQ?



ក. បង្ហាញថាបើ$\alpha+\beta=\dfrac{1}{2}$ និង$\beta=\gamma$

នោះចំនុចRនៅ លើ បន្ទាត់ MN

គេមាន:

$\overrightarrow{OR}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\left(\dfrac{1}{2}-\beta\right)\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\beta\overrightarrow{OC}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\beta\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+2\beta\left(\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}-\dfrac{\overrightarrow{OA}}{2}\right)$ តែNចែកក្នុង$[BC]$ជាពីរ

$\Rightarrow\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=\overrightarrow{ON}$ និង$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ នោះគេបាន:

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OM}+2\beta\left(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}\right)=\overrightarrow{OM}+2\beta\overrightarrow{MN}$

ដូចនេះបើ $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$ និង $\beta=\gamma$ នោះចំណុច R រត់នៅលើ បន្ទាត់ MN ។

ខ. រកលក្ខខណ្ឌចាំបាច់និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឲ្យ MN ប្រសព្វនឹង PQ

តាង $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ និង $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$

តាង X និង X' ជាចំណុចចែក $[PQ]$ និង $[MN]$ តាមផលធៀប $1-k$ លើ k និង $1-\ell$ លើ ℓ' រៀងគ្នានោះ គេបាន:

$\overrightarrow{OX}=k\overrightarrow{OP}+(1-k)\overrightarrow{OQ}=k\left[(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}\right]+(1-k)t\overrightarrow{OC}$

$=k(1-s)\vec{a}+ks\vec{b}+t(1-k)\vec{c}$

$\overrightarrow{OX'}=\ell\overrightarrow{OM}+(1-\ell)\overrightarrow{ON}=\frac{\ell}{2}\overrightarrow{OA}+(1-\ell)\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$

$=\frac{\ell}{2}\vec{a}+\frac{1-\ell}{2}\vec{b}+\frac{1-\ell}{2}\vec{c}$

ដោយ $[PQ]$ ប្រសព្វ $[MN]$ នោះគេបាន:

$$\begin{cases} k(1-s)=\frac{\ell}{2} & (1)\\ ks=\frac{1-\ell}{2} & (2)\\ t(1-k)=\frac{1-\ell}{2} & (3)\end{cases}$$

$(1)+(2)\Rightarrow k=\frac{1}{2}$ ជំនួសក្នុង (3) គេបាន: $t=1-\ell$

តាម (2) គេបាន $s=t$

$\Rightarrow k=\frac{1}{2}, s+\ell=1$ និង $s=t\Rightarrow t+\ell=1$

ដូចនេះបើ $[PQ]$ ប្រសព្វ $[MN]$ នោះគេបាន: $t+\ell=1$ ។

+បើ $t+\ell=1$ នោះគេបាន:

$\overrightarrow{OX}=k(1-s)\vec{a}+ks\vec{b}+t(1-k)\vec{c}$

$=k(1-s)\vec{a}+ks\vec{b}+(1-\ell)(1-k)\vec{c}$

បើមាន k, s និង ℓ ដែល

$$\begin{cases} k(1-s)=\dfrac{\ell}{2} & (4) \\ ks=\dfrac{1-\ell}{2} & (5) \\ (1-\ell)(1-k)=\dfrac{1-\ell}{2} & (6) \end{cases}$$

$(4)+(5)\Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$ ជួសក្នុង $(5)\Rightarrow s=1-\ell \Leftrightarrow s+\ell=1$

ដោយមាន s និង t ហើយ $s+\ell=1$ ដែល $0<s<1$ និង $0<t<1$ យើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា $[PQ]$ ប្រសព្វ $[NM]$។

ដូចនេះ $s+\ell=1$ ជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បី អោយ $[PQ]$ ប្រសព្វ $[NM]$។

១៩. ក្នុងចតុមុខនិយ័ត $OABC$ ដែលមានជ្រុងស្មើ 1 តាង E ជាចំណុចចែកជ្រុង $[CD]$ ខាង ក្នុងតាមផលធៀប 1 លើ 2 ។ យកចំណុច F នៅលើជ្រុង $[AD]$ ហើយតាង G ជាចំណុចប្រសព្វរវាង $[AE]$ និង $[CF]$ ។ ហើយយក $AF\div AD=1\div m$ ដែល $m\neq 0$។

ក. បង្ហាញថា $\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}$ ដែល α និង β ជាអនុគមន៍នៃ m។

ខ. រកតំលៃ m ដែលធ្វើអោយចម្ងាយ BG មានតំលៃ អប្បបរមា។

ក. បង្ហាញថា $\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}$

ដែល α និង β ជាអនុគមន៍នៃ m

ដោយ G នៅលើ $[CF]$ នោះគេបាន

$$\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AC}+(1-k)\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AC}+(1-k)\frac{1}{m}\overrightarrow{AD}$$

ហើយ G នៅលើ $[AE]$ នោះគេបាន

$$\overrightarrow{AG}=\ell\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\ell\overrightarrow{AC}+\frac{\ell}{3}\overrightarrow{AD}$$

ដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{AD}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែ នោះគេបាន: $\begin{cases} k=\dfrac{2}{3}\ell & (1) \\ \dfrac{1-k}{m}=\dfrac{\ell}{3} & (2) \end{cases}$

យក(1)ជួសក្នុង(2)គេបាន

$\ell=\dfrac{3}{m+2}$ ជួសក្នុង$(1)\Rightarrow k=\dfrac{2}{m+2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{m+2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{m}{m+2}\overrightarrow{AD}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}$ ដែល $\alpha=\dfrac{2}{m+2}$ និង $\beta=\dfrac{m}{m+2}$

ខ. រកតំលៃ m ដែលធ្វើអោយចម្ងាយ BG មានតំលៃ អប្បបរមា

ចំងាយរវាង B និង G មានតំលៃអប្បមរមាពេល $[BG]\perp[AE]$ ដោយ

$$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{m+2}\overrightarrow{AC}+\frac{m}{m+2}\overrightarrow{AD} \qquad (i)$$

$$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AE}=\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{m+2}\overrightarrow{AC}+\frac{m}{m+2}\overrightarrow{AD}\right).\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\right)+\frac{4}{3(m+2)}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$$

$$+\frac{2(m+1)}{3(m+2)}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}+\frac{m}{3(m+2)}\left|\overrightarrow{AD}\right|^2$$

ដោយ $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=1$ និង $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ (ព្រោះចតុមុខ $OABC$ ជាចតុមុខនិយ័ត)

$$\Rightarrow \overrightarrow{BG}.\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{3}\left(2.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{3(m+2)}+\frac{2(1+m)}{3(m+2)}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$+\frac{m}{3(m+2)}=-\frac{1}{2}+\frac{5+2m}{3(m+2)}$$

$$\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{AE}=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}+\frac{5+2m}{3(m+2)}=0\Leftrightarrow m=-4$$

$m=-4$ យើងបាន$[BG]\perp[AE]$ដែលនាំអោយ BG មាន អប្បបរមា។ យក $m=-4$ ជួស(i) គេបាន:

$$\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{BG}\right|^2 = \left(2\overrightarrow{AD} - \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\right)^2 = 4\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2$$

$$+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$= 4+1+1-4.\frac{1}{2} - 4.\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 3$$

$$\left|\overrightarrow{BG}\right|^2 = 3 \Rightarrow \left|\overrightarrow{BG}\right| = \sqrt{3}$$

ដូចនេះ តំលៃអប្បបរមានៃ BG គឺ $\sqrt{3}$

ដំណោះស្រាយលំហាត់ជំពូក

១. ក្នុងចតុមុខនិយ័ត $OABC$ ដែលមានជ្រុងស្មើនិង1 តាង M និង N ជាចំនុចកណ្តាលនៃជ្រុង$[AB]$ និង$[OC]$ ហើយយក$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NB}$

ខ. យក $\widehat{BNM}=\theta$ ។ រកតំលៃ$\cos\theta$ ។

ក. កំណត់តម្លៃផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NB}$

$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OM}$

តែ M ចែកជ្រុង AB ជាពីរ

$\Rightarrow \overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right),\overrightarrow{NO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=-\frac{1}{2}\vec{c}$

$\Rightarrow \overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OB}=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

$\Rightarrow \overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NB}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}\right).\left(\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)$

$=\frac{1}{2}\vec{a}.\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{a}.\vec{c}+\frac{1}{2}\left|\vec{b}\right|^2-\frac{1}{4}\vec{b}.\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}.\vec{c}+\frac{1}{4}\left|\vec{c}\right|^2$

$=\frac{1}{2}\vec{a}.\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{a}.\vec{c}+\frac{1}{2}\left|\vec{b}\right|^2-\frac{3}{4}\vec{b}.\vec{c}+\frac{1}{4}\left|\vec{c}\right|^2$

តែក្នុងចតុមុខនិយ័ត$OABC$, $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1$

និង $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}=\vec{b}.\vec{c}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NB}=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{2}}$

ខ. រកតំលៃ$\cos\theta,\theta=\widehat{BNM}$

$$\cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{NM}\right|}{\left|\overrightarrow{NB}\right|\left|\overrightarrow{NM}\right|}$$

តែ $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NB}=\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{NB}=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{NB}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2-\vec{b}.\vec{c}+\frac{1}{4}\left|\vec{c}\right|^2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{NB}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BM}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{NM}\right|^2=\left|\overrightarrow{NB}\right|^2+2\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{BM}+\left|\overrightarrow{BM}\right|^2$

$\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BC}\right).\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}\right)=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$

$=-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{NM}\right|^2=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\overrightarrow{NM}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}}$

២. ក្នុងចតុមុខនិយ័ត $OABC$ ដែលមានជ្រុងស្មើនឹង1 តាង P,Q និង R ជាចំនុច ចែកជ្រុង $[OA]$, $[OB]$ និង$[OC]$ខាងក្នុង តាមផលធៀប$1\div 2$, $2\div 1$ និង$3\div 1$រៀងគ្នា។ ហើយយក $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ និង $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ ។

ក. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{PQ}$ និង $\overrightarrow{PR}$ អាចសរសេជាអនុគមន៍នៃ វ៉ិចទ័រ $\vec{a}$, $\vec{b}$ និង $\vec{c}$ ។

ខ. កំណត់តំលៃ $\cos\widehat{RPQ}$ ។

ក. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

តែ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ និង $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{PQ}=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OR}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$

តែ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{PR}=\frac{3}{4}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}}$

ខ. កំណត់តំលៃ $\cos\widehat{RPQ}$

$$\cos\widehat{RPQ}=\frac{\left|\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{PQ}\right|}{\left|\overrightarrow{PR}\right|\left|\overrightarrow{PQ}\right|}$$

$$\left|\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\left(\frac{3}{4}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}\right)\left(\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2}\vec{b}\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{a}\vec{c}-\frac{2}{9}\vec{a}\vec{b}+\frac{1}{9}\vec{a}^2\right|=\frac{1}{8}$$

$$\overrightarrow{PR}=\frac{3}{4}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{PR}\right|^2=\frac{9}{16}\left|\vec{c}\right|^2-\frac{1}{2}\vec{a}\vec{c}+\frac{1}{9}\vec{a}^2=\frac{61}{144}$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{PR}\right|=\frac{\sqrt{61}}{12}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=\frac{4}{9}\left|\vec{b}\right|^2-\frac{4}{9}\vec{a}\vec{b}+\frac{1}{9}\vec{a}^2=\frac{3}{9}$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow\cos\widehat{RPQ}=\frac{\frac{1}{8}}{\left(\frac{\sqrt{61}}{12}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}=\frac{36}{8\sqrt{183}}=0.33265$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\widehat{RPQ}=0.33265}$

៣. គេអោយបីចំណុច $A(1,-1,0)$, $B(-2,-2,2)$ និង $C(0,1,1)$ យក $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ និង $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃនៃ t ដើម្បីអោយមុំរវាងវិចទ័រ $\vec{a}+t\vec{b}$ និង $\vec{b}$ មានរង្វាស់មុំ 60° ។

ខ. រកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

ក. ដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}+t\vec{b}$ និង $\vec{b}$ បង្កើតបានមុំ 60° នោះគេបាន

$$\cos 60^\circ = \frac{\left|\left(\vec{a}+t\vec{b}\right).\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|\left|\vec{b}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|\left|\vec{b}\right| = \left|\left(\vec{a}+t\vec{b}\right).\vec{b}\right|$$

តែ $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-3, 1, 2)$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1)$ នោះគេបាន

$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{6}$; $\left|\left(\vec{a}+t\vec{b}\right).\vec{b}\right| = \left|\vec{a}.\vec{b} + t\left|\vec{b}\right|^2\right| = \left|3+6t\right|$ និង

$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + 2t\vec{a}.\vec{b} + t^2\left|\vec{b}\right|^2 = 14 + 6t + 6t^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{6t^2+6t+14} = 3+6t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{36t^2+36t+84} = 6+12t$$

ដោយ $\sqrt{36t^2+36t+84} \geq 0 \Rightarrow 6+12t \geq 0 \Rightarrow t \geq -\frac{1}{2}$

$$36t^2+36+84 = 36+144t+144t^2$$

$$\Leftrightarrow 9t^2+9t-4=0$$

$$\Rightarrow \Delta = 81+144 = 225 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 15$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = -\frac{4}{3}$$

តែ $t = -\frac{4}{3} < -\frac{1}{2}$ មិនយក

ដូចនេះ $\boxed{t = \frac{1}{3}}$

ខ. តាង S ជាក្រលាផ្ទៃត្រីកោន ABC

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sqrt{1-\cos^2 \widehat{BAC}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos \widehat{BAC}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{14(6)-3^2} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{S = \frac{5}{2}\sqrt{3}}$ ឯកតាផ្ទៃ

៤. តាង ℓ បន្ទាត់មួយដែលកំណត់ដោយ $x=t$, $y=-3+3t$, $z=-2+2t$ និង α ជាប្លង់ដែលកាត់តាមបន្ទាត់ ℓ និងកាត់តាមចំណុច $P(1, 2, 1)$ ។

រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ α និង អ័ក្ស z ។

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់នៃប្លង់ α

បន្ទាត់ ℓ កាត់តាមចំនុច $Q(0, -3, -2)$ និងមានវ៉ិចទ័រ ប្រាប់ទិស $\vec{u}(1, 3, 2)$

$\overrightarrow{PQ}=(0-1, -3-2, -2-1)=(-1, -5, -3)$

ដោយ α កាត់តាមបន្ទាត់ ℓ និង កាត់តាមចំណុច $P(1, 2, 1)$

$\Rightarrow \vec{u}\times\overrightarrow{PQ}$ ជាវ៉ិចទ័រកែងនឹងប្លង់ α ដូចនេះគេបាន

$$\vec{n}=\vec{u}\times\overrightarrow{PQ}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & 2\\ -1 & -5 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ -5 & -3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{vmatrix}\vec{j}$$

$$+\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & -5\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$$

$\Rightarrow$ សមីការប្លង់ α ដែលកាត់តាមចំណុច $P(1, 2, 1)$ និងមានវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់ $\vec{n}=(1, 1, -2)$ គឺ:

$1(x-1)+1(y-2)-2(z-1)=0$ ឬ $\alpha: x+y-2z-1=0\ (1)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្ររបស់អ័ក្ស z គឺ: $\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=t\end{cases}\quad ,(t\in\mathbb{R})(2)$

ដោយ α ប្រសព្វនឹងអ័ក្ស z នោះដោយយក (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន: $t=-\dfrac{1}{2}$ ជួសក្នុង (2)

នោះគេបាន $\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{កូអរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាងប្លង់ } \alpha \text{ និង អក្ស } z \text{ គឺ } \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)}$

៥. តាង ℓ ជាបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $(4, 0, 3)$ ហើយស្រប នឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}(1,1,1)$ និង (m) ជាបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $(3, 2, -4)$ ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}(-2,1,4)$ ។ តាង α ជាប្លង់ដែលស្របទៅនឹង ℓ និង m ហើយចម្ងាយពីបន្ទាត់ទាំងពីរ ទៅប្លង់ មានចម្ងាយស្មើគ្នា ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ រវាង α និងអ័ក្ស z ។

តាង $\alpha : ax+by+cz+d$ ជាសមីការប្លង់ដែលមានវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់ $\vec{n}=(a, b, c)$

បន្ទាត់ ℓ កាត់តាម $P(4, 0, 3)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}(1,1,1)$

បន្ទាត់ m កាត់តាម $Q(3, 2, -4)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{v}(-2,1,4)$

ដោយប្លង់ $\alpha \parallel (\ell) \Rightarrow \vec{n}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow a+b+c=0 \quad (1)$

និង $\alpha \parallel (m) \Rightarrow \vec{n}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow -2a+b+4c=0 \quad (2)$

$(1)-(2) \Rightarrow a=c$ ជួសក្នុង $(1) \Rightarrow b=-2c$

នោះគេបានសមាមាត្រ: $a:b:c=1:-2:1$

តាង $\vec{n}_1=(1,-2,1) \Rightarrow \vec{n}(a, b, c) \parallel \vec{n}_1(1,-2,1)$

តែ $\begin{cases} \vec{n} \parallel \vec{n}_1 \\ \vec{n} \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \alpha$ ដូចនេះយើងអាចយក

$\vec{n}=\vec{n}_1=(1,-2,1)$ ជាវ៉ិចទ័រន័រម៉ាល់នៃប្លង់ α ម្យ៉ាងទៀតចម្ងាយពីបន្ទាត់ ℓ ទៅប្លង់ α ស្មើចម្ងាយពីបន្ទាត់ m ទៅប្លង់ α

តាង D_ℓ ជាចម្ងាយពីចំណុច $P(4, 0, 3)$ នៅលើបន្ទាត់ ℓ ទៅប្លង់ α និងតាង D_m ជាចំងាយពីចំនុច $Q(3, 2, -4)$ នៅលើ បន្ទាត់ m ទៅប្លង់ α នោះគេបាន:

$$D_\ell = D_m \Leftrightarrow \frac{|1(4)-2(0)+1(3)+d|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{|1(3)-2(2)+1(-4)+d|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}$$

$$|d+7|=|d-5| \Leftrightarrow d^2+14d+49=d^2-10d+25$$
$$\Leftrightarrow d=-1$$

គេបាន $\alpha : x-2y+z-1=0$

ដោយ $\alpha: x-2y+z-1=0$ (1)ប្រសព្វអ័ក្ស z ដែលមានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \quad ,(t\in\mathbb{R})(2) \\ z=t \end{cases}$$

យក (2)ជួស $(1) \Rightarrow t=1$ តាម (2) នោះគេបាន$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ α និងអ័ក្ស z គឺ$(0, 0, 1)$។

៦. តាង ℓ និង m ជាបន្ទាត់ដែលកំនត់ដូចខាងក្រោម:

$(\ell): x=3+p$, $y=1+2p$, $z=4-2p$,

$(m): x=2+3q, y=-2+2q, z=-3q$

ដែល p និង q ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រហើយតាង (n) ជាបន្ទាត់ កាត់តាមចំណុច $A(1,-2,2)$ បិងប្រសព្វបន្ទាត់ ℓ និង m ផង ដែរ ។ ឧបមា (n)ប្រសព្វ (ℓ) និង (m)ត្រង់ P និង Q រៀងគ្នា។

ក. រកសមីការបន្ទាត់ (n)

ខ. រកចម្ងាយរវាង P និង Q។

ក. រកសមីការបន្ទាត់ (n)

យក $P(3+p, 1+2p, 4-2p)$នៅលើបន្ទាត់ (ℓ)

ដោយ P នៅលើបន្ទាត់ (n)ផងដែរនោះយើងអាច យក $\overrightarrow{AP}=(2+2p, 2+2p, 2-2p)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់(n)

$$\Rightarrow (n): \begin{cases} x=1+(2+p)t \\ y=-1+(2+2p)t, (t\in\mathbb{R})\ (i) \\ z=2+(2-2p)t \end{cases}$$

ម្យ៉ាងទៀត$(n)\cap(m)$នោះត្រូវតែមាន p, q, t ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases} 1+(2+p)t = 2+3q \\ -1+(1+p)2t = -2+2q \\ 2+(2-p)2t = -3q \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1+(2+p)t-3q=0 & (ii) \\ 1+(1+p)2t-2q=0 & (iii) \\ 2+(2-p)2t+3q=0 & (iv) \end{cases}$$

$(ii)+(iv)$ និង $3(iii)+2(iv)$ គេបាន:

$$\begin{cases} 1+t(4-p)=0 & (v) \\ 7+t(10+2p)=0 & (vi) \end{cases}$$

ដោយដោះស្រាយ (v) និង (vi) គេបាន $t=-\frac{1}{2}$ និង $p=2$ ជួសក្នុង (i)

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ (n) គឺ:

$$(n): \begin{cases} x = 1+4t \\ y = -1+6t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2-2t \end{cases}$$

ខ. រកចម្ងាយរវាង P និង Q

ដោយ (n) ប្រសព្វ (m) ត្រង់ចំណុច Q ពេល $t=-\frac{1}{2}$

យក $t=-\frac{1}{2}$ ជួសក្នុង $(n) \Rightarrow Q(-1,-4,3)$

ម្យ៉ាងទៀត (n) ប្រសព្វ (ℓ) ត្រង់ចំណុច P ពេល $p=2$

យក $p=2$ ជួសក្នុង $(\ell) \Rightarrow P(5,5,0)$

គេបាន:

$$\overrightarrow{PQ} = (-6,-9,3)$$

$$\Rightarrow \boxed{PQ = \sqrt{(-6)^2+(-9)^2+3^2} = 3\sqrt{14}}$$

៧. តាង (ℓ) និង (m) ជាបន្ទាត់កំនត់ដូចខាងក្រោម:

$$(\ell):\begin{cases}x=1-s\\ y=-2+s\\ z=-1+2s\end{cases},(m):\begin{cases}x=-3+2t\\ y=-1+t\\ z=1-t\end{cases}$$ ដែល s និង t ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។

តាង $f(s)$ជាចម្ងាយពីចំណុច $P(-s+1,\ s-2,\ 2s-1)$ នៅលើបន្ទាត់ℓ ទៅបន្ទាត់ m ។

គណនា $f(s)$ ជាអនុគមន៍នៃ s ។

គណនា $f(s)$ ជាអនុគមន៍នៃ s តាង$Q(-3,\ -1,\ 1)$នៅលើបន្ទាត់ (m)

$$\Rightarrow \overrightarrow{QP}=(4-s,\ s-1,\ 2s-2)$$

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់(m)គឺ $\vec{u}(2,1,-1)\Rightarrow |\vec{u}|=\sqrt{6}$

$$\overrightarrow{QP}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4-s&s-1&2s-2\\2&1&-1\end{vmatrix}=(3-3s)\vec{i}+3s\vec{j}+(6-3s)\vec{k}$$

$$\Rightarrow f(s)=\frac{|\overrightarrow{QP}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{(3-3s)^2+(3s)^2+(6-3s)^2}}{\sqrt{6}}$$

$$=\sqrt{\frac{27s^2-54s+45}{6}}=\sqrt{\frac{9s^2-18s+15}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{18s^2-36s+30}$$

ដូចនេះ $\boxed{f(s)=\frac{1}{2}\sqrt{18s^2-36+30}}$

៨. យក $A(1,-1,-2)$, $B(0,3,0)$, $\vec{u}(3,-1,2)$ និង $\vec{n}(2,1,-1)$។ ℓ ជាបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយស្រប ទៅនឹង$\vec{u}$ និងα ជាប្លង់កាត់តាមចំណុច B ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}$ ។ តាង (PQ) ជាបន្ទាត់កែងដែលគូសចេញពីចំណុចP នៅលើបន្ទាត់ℓ ទៅចំណុចQ នៅលើប្លង់ α ។ ពេលដែល P រត់នៅលើបន្ទាត់ ℓ រកសមីការនៃសំនុំចំណុច Q ។

ចំណុច P នៅលើបន្ទាត់(ℓ)នោះគេបាន

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{u}$$

ដោយចំណុចQនៅលើបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច P ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}$ យើងបាន

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}+s\vec{n}=\overrightarrow{OA}+t\vec{u}+s\vec{n}\qquad(1)$$

ដោយចំណុច B និង Q នៅលើប្លង់ α ដែលមានវ៉ិចទ័រ ណ័រម៉ាល់ $\vec{n}$

យើងបាន:

$$\overrightarrow{BQ} \perp \vec{n}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BQ}.\vec{n} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OB}\right).\vec{n} = 0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OQ}.\vec{n} - \overrightarrow{OB}.\vec{n} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA} + t\vec{u} + s\vec{n}\right).\vec{n} - \overrightarrow{OB}.\vec{n} = 0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\vec{n} + t\vec{u}.\vec{n} + s\left|\vec{n}\right|^2 - \overrightarrow{OB}.\vec{n} = 0$$
$$\Leftrightarrow 3 + 3t + 6s - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow t = -2s$$

ដោយ $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u} + s\vec{n}$ តាម (1) យើងបានសុំនុំចំណុច Q គឺ $\begin{cases} x = 1 - 4s \\ y = -1 + 3s \\ z = -2 - 5s \end{cases}$ ដែល s

ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

៩. យក $A(0, 0, 1)$, $\vec{u}(-2, 1, 1)$ និង $\vec{n}(1, 1, 1)$ ។ តាង ℓ ជាបន្ទាត់ដែល កាត់តាមចំនុច $O(0, 0, 0)$ ហើយស្របនឹង វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង α ជាប្លង់កាត់តាម ចំនុច A ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}$ ។ ឧបមាថា $P(-1, 2, -3)$ ជាចំណុចដែល នៅតែម្ខាងនៃ បន្ទាត់ ℓ ធៀបទៅនឹងប្លង់ α ។

ក. តាង P' ជាចំនុចឆ្លុះនៃ P ធៀបនឹងប្លង់ α ។

រកកូអរដោនេនៃ P' និងចម្ងាយរវាងចំណុច P និង P' ។

ខ. យកចំណុច $R(-2t, t, t)$ នៅលើបន្ទាត់ ℓ និងចំណុច

Q នៅលើប្លង់ α ។ ដោយប្រើ t រកកូអរដោនេនៃ Q ដែលធ្វើ អោយផលបូកប្រវែង

$PQ + QR$ មានតំលៃអប្បបរមា ។

គ. ពេលដែល R រត់នៅលើបន្ទាត់ ℓ រកសុំនុំចំណុច Q ។

ក. រកកូអរដោនេនៃចំណុច P'

តាង PH គឺជាបន្ទាត់កែងដែលគូសចេញពីចំណុច P ទៅចំណុច H នៅលើប្លង់ (α)

នោះ $\overrightarrow{PH}$ និង $\overrightarrow{PP'}$ អាចសរសេរជា $\overrightarrow{PH}=t\vec{n},$ និង $\overrightarrow{PP'}=2\overrightarrow{PH}$

ដូចនេះ

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{OP}+t\vec{n}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

ដោយចំណុច A និង H ជាចំណុចនៅលើប្លង់ α យើងបាន $\overrightarrow{AH}\perp\vec{n}$ ។ ដូចនេះ

$$\overrightarrow{AH}.\vec{n}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}\right).\vec{n}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -3+3t=0$$

$$\Leftrightarrow t=1$$

ដូចនេះ

$$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PH}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}+2t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$$

ដូច្នេះ កូអរដោនេនៃ P' គឺ $(1,4,-1)$ ។

+រកចម្ងាយរវាងចំណុច P និង P'

$$PP'=2\left|\overrightarrow{PH}\right|=2\left|t\vec{n}\right|=2\left|\vec{n}\right|=2\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{PP'=2\sqrt{3}}$

ខ. រកកូអរដោនេនៃ Q ដោយបន្ទាត់ (ℓ) និងចំណុច P នៅតែម្ខាងនៃប្លង់ (α)

ដើម្បីអោយ $PQ+QR$ មាន តំលៃអប្បបរមា លុះត្រាតែចំណុច Q ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ RP' ដែល P' ជាចំណុច ឆ្លុះនៃ P ។ នោះគេបាន ចំណុច R និង P' នៅម្ខាងម្នាក់នៃប្លង់ (α) ។ដូចនេះពេល Q ជាប្រសព្វរវាង (RP') និង ប្លង់ (α) នោះគេបានចំណុច Q នៅលើបន្ទាត់ (RP') បង្ហាញដោយ:

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP'}+s\overrightarrow{P'R}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2t-1\\t-4\\t+1\end{pmatrix}$$

ដោយ Q ជាចំណុចមួយនៅលើប្លង់ (α) យើងបាន $\overrightarrow{OQ}.\vec{n}=0$

ដូចនេះ

$$\left(\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2t-1\\t-4\\t+1\end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 3-4s=0$$

$$\Leftrightarrow s=\frac{3}{4}$$

ដូចនេះយើងបាន

$$Q\left(-\frac{3}{2}t+\frac{1}{4},\frac{3}{4}t+1,\frac{3}{4}t-\frac{1}{4}\right)$$

គ. រកសំនុំចំណុច Q

តាមសំនួរ (ក)គេបាន

$$\overrightarrow{OQ}=\begin{cases}x=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}t\\ y=1+\frac{3}{4}t\\ z=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}t\end{cases}=\begin{cases}x=\frac{1}{4}-2\left(\frac{3}{4}t\right)\\ y=1+\frac{3}{4}t\\ z=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}t\end{cases}$$

ដោយចំណុច R រត់នៅលើបន្ទាត់ (ℓ) អថេរ t អាច យកតំលៃនៅក្នុង $\mathbb{R}$ ។

យក $u=\frac{3}{4}t$

ដូចនេះសមីការនៃសំនុំចំណុច Qបង្ហាញដោយ: $\begin{cases} x=\frac{1}{4}-2u \\ y=1+u \quad (u\in\mathbb{R}) \\ z=-\frac{1}{4}+u \end{cases}$

ឮ១០. នៅក្នុងគូប $ABCD-EFGH$ តាង $AB=1$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ និង $\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ តាង P ជាចំណុចនៅ លើអង្កត់ $[DF]$ ដែល $[DF]\perp[AP]$ និង R ជាចំណុចប្រសព្វ រវាងបន្លាយនៃ $[AP]$ និងប្លង់ $(CDHG)$ ។

ក. រក $\overrightarrow{AP}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\vec{b},\vec{d}$ និង $\vec{e}$

ខ. រក $\overrightarrow{AR}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\vec{b},\vec{d}$ និង $\vec{e}$ ។

ក. រក $\overrightarrow{AP}$ជាអនុគមន៍នៃ $\vec{b},\vec{d}$ និង$\vec{e}$

ដោយចំណុច P ចែកក្នុង អង្កត់ $[DF]$តាមផលធៀប $\frac{DP}{PF}=\frac{1-t}{t}$ នោះគេបាន

$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AD}+(1-t)\overrightarrow{AF}=t\overrightarrow{AD}+(1-t)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right)$$

$$=t\vec{d}+(1-t)\left(\vec{b}+\vec{e}\right)=(1-t)\vec{b}+t\vec{d}+(1-t)\vec{e}$$

ដោយ $[DF]\perp[AP]\Rightarrow\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{AP}=0$

$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}\right).\overrightarrow{AP}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right).\overrightarrow{AP}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\vec{b}-\vec{d}+\vec{e}\right).\{(1-t)\vec{b}+t\vec{d}+(1-t)\vec{e}\}=0$$

$$\Leftrightarrow(1-t)\left|\vec{b}\right|^2+t\vec{b}.\vec{d}+(1-t)\vec{b}.\vec{e}-(1-t)\vec{b}\vec{d}-t\left|\vec{d}\right|^2$$

$$-(1-t)\vec{d}.\vec{e}+(1-t)\vec{e}.\vec{b}+t\vec{e}.\vec{d}+(1-t)\left|\vec{e}\right|^2=0$$

$$\Leftrightarrow (1-t)\left|\vec{b}\right|^2 - t\left|\vec{d}\right|^2 + (1-t)\left|\vec{e}\right|^2 + (2t-1)\vec{b}.\vec{d}$$
$$+(2-2t)\vec{b}.\vec{e} + (2t-1)\vec{d}.\vec{e} = 0$$

ដោយ $\left|\vec{b}\right| = \left|\vec{d}\right| = \left|\vec{e}\right| = 1$ និង $\vec{b}.\vec{d} = \vec{d}.\vec{e} = \vec{e}.\vec{b} = 0$

នោះគេបាន:

$$(1-t) - t + (1-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d} + \frac{1}{3}\vec{e}}$

ខ. រក $\overrightarrow{AR}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\vec{b}, \vec{d}$ និង $\vec{e}$

ដោយចំនុច R នៅលើបន្ទាត់ (AP) យើងបាន

$$\overrightarrow{AR} = s\overrightarrow{AP} = \frac{s}{3}\vec{b} + \frac{2s}{3}\vec{d} + \frac{s}{3}\vec{e}$$

ម្យ៉ាងទៀតចំណុច R នៅលើប្លង់ $(CDHG)$ គេបាន

$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AD} + \alpha\overrightarrow{DC} + \beta\overrightarrow{DH} = \alpha\vec{b} + \vec{d} + \beta\vec{e}$$

ដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{b}, \vec{d}$ និង $\vec{e}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែ យើងបាន:

$\frac{s}{3} = \alpha = \beta$ និង $\frac{2s}{3} = 1$

$\Leftrightarrow s = \frac{3}{2}$ និង $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{d} + \frac{1}{2}\vec{e}}$

នេះមានន័យថាចំណុច R ជាចំណុចប្រសព្វនៃអង្កត់ទ្រូង (ឬជាផ្ចិត) នៃការេ $DGCH$ ។

១១. នៅក្នុងចតុមុខនិយ័តដែលជ្រុងរបស់វាស្មើ 1 តាង D និង E ជាចំនុចនៅលើ ជ្រុង $[OA]$ និង $[BC]$ ដែល $OD \div DA = 2 \div 1$ និង $BE \div EC = 2 \div 1$ រៀងគ្នា ។

រកផ្ទៃក្រលាត្រីកោណ ODE ។

តាង S_{ODE} ជាផ្ទៃក្រលា

ត្រីកោណ ODE គេបាន

$$S_{ODE}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OD}\right|\left|\overrightarrow{OE}\right|\sin \widehat{EOD}$$

$$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OD}\right|\left|\overrightarrow{OE}\right|\sqrt{1-\cos^2 \widehat{EOD}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OD}\right|^2\left|\overrightarrow{OE}\right|^2-\left(\left|OD\right|\left|OE\right|\cos \widehat{EOD}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OD}\right|^2\left|\overrightarrow{OE}\right|^2-\left(\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OE}\right)^2}$$

យក $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ និង $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ នោះ:

$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\vec{a}$ និង $OE=\frac{1}{3}\left(\vec{b}+2\vec{c}\right)$

ដោយ $|a|=|b|=|c|=1$ និង $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}=\vec{b}.\vec{c}=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

យើងបាន $\left|\overrightarrow{OD}\right|^2=\left|\frac{2}{3}\vec{a}\right|^2=\frac{4}{9}$

$$\left|\overrightarrow{OE}\right|^2=\left|\frac{1}{3}\left(\vec{b}+2\vec{c}\right)\right|^2=\frac{1}{9}\left(\left|\vec{b}\right|^2+4\vec{b}.\vec{c}+4\left|\vec{c}\right|^2\right)=\frac{7}{9}$$

$$OD.OE=\left(\frac{2}{3}\vec{a}\right).\left(\frac{1}{3}\left(\vec{b}+2\vec{c}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{9}\left(\vec{a}.\vec{b}+2\vec{a}.\vec{c}\right)=\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ:

$$S_{ODE}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OD}\right|^2\left|\overrightarrow{OE}\right|^2-\left(\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OE}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{9}.\frac{7}{9}-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\boxed{\frac{\sqrt{19}}{18}}$$

១២. តាង ℓ ជាបន្ទាត់ដែលកាត់តាមពីរចំណុច $A(4,1,2)$ និង $B(6,3,3)$ ហើយ α ជាប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $O(0,0,0)$, $C(1,1,1)$ និង $D(2,5,3)$ ។ តាង P ជាចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ ℓ និងប្លង់ α ។

ក. រកកូអរដោនេនៃចំណុច P ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ m នៅក្នុងប្លង់ α ដែលកាត់តាមចំណុច P ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ ℓ ។

ក. រកកូអរដោនេនៃចំណុច P

ដោយ P នៅលើបន្ទាត់ (ℓ) កូអរដោនេចំណុច P អាចសរសេរជា

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$$

$$=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}..........(i)$$

ហើយដោយ P នៅប្លង់ (α) កូអរដោនេចំណុច P អាចសរសេរជា

$$\overrightarrow{OP}=p\overrightarrow{OC}+q\overrightarrow{OD}$$

$$=p\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}............(ii)$$

តាម $(i)=(ii)$ គេបាន:

$$\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$$

ដូចនេះ $\begin{cases}4+2t=p+2q\\1+2t=p+5q\\2+t=p+3q\end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការគេបាន $t=-1,\ p=4,$ និង $q=-1$

ដូចនេះតាម (i) យើងបាន $P(2,-1,1)$ ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ m នៅក្នុងប្លង់ α ដែលកាត់តាមចំណុច P ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ ℓ

តាង $\vec{m}$ ជាវ៉ិចទ័រស្របទៅនឹងបន្ទាត់ (m)

ដោយបន្ទាត់ (m) នៅលើប្លង់ (α) នោះវ៉ិចទ័រ $\vec{m}$ អាចសរសេរជា

$$\vec{m} = p\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$$

ហើយដោយ $(m)\perp(\ell)$ នោះផលគុណស្កាលែនៃ $\vec{m}$ និងវ៉ិចទ័រ $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ ស្មើសូន្យ។

ដូចនេះ $p\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5p + 17q = 0$

មានន័យថា $p:q = -17:5$ ។

ដូចនេះវ៉ិចទ័រ $\vec{m}$ ស្របនឹង $-17\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\8\\-2\end{pmatrix}$

ដូចនេះ ដោយបន្ទាត់ (m) កាត់ចំណុច P សមីការបន្ទាត់ (m) គឺ

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-7\\8\\-2\end{pmatrix}$ ដែល s ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ