មេរៀនទី១: ភាពចែកដាច់ និងវិធីចែកអឺគ្លីត

ដំណោះស្រាយលំហាត់

1. ដោះស្រាយបញ្ញាក់តាមកំណើន ស្រាយថា 8ចែកដាច់នឹង$7^{2k}-1$ដែល kជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ។

ដំណោះស្រាយ

បើ$k=0$នោះ $7^{2\times 0}-1=1-1=0$ ចែកដាច់នឹង 8

បើ $k=1$ នោះ$7^{2\times 1}-1=49-1=48$ចែកដាច់នឹង 8

ឧបមាថាវាពិតរហូតដល់kគឺ $7^{2k}-1$ចែកដាច់នឹង 8

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតរហូតដល់ $k+1$គឺ $7^{2(k+1)}-1$ចែកដាច់នឹង 8

យើងមាន $7^{2(k+1)}-1 \quad =7^{2k+2}-1=7^2\times 7^{2k}-1=49\times 7^{2k}-1$

$=(48+1)\times 7^{2k}-1 \quad =48\times 7^{2k}+7^{2k}-1$

ដោយ48×7^{2k}ចែកដាច់នឹង8 និង $7^{2k}-1$ចែកដាច់នឹង8នោះ

$48\times 7^{2k}+7^{2k}-1$ ចែកដាច់នឹង8

ដូចនេះ 8ចែកដាច់នឹង $7^{2k}-1$ ។

2. បង្ហាញថា n^4-n^2ចែកដាច់នឹង 12 ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $N=n^4-n^2=n^2(n^2-1)=n^2(n-1)(n+1)$

ដោយ $12=3\times 4$នោះយើងនឹងបង្ហាញថា N ចែកដាច់នឹង 3 និង 4

-ករណី n គូ គឺ $n=2k, k\in\mathbb{N}$គេបាន

$N=(2k)^2(2k-1)(2k+1)=4k^2(2k-1)(2k+1)$ នាំឲ្យ N ចែកដាច់នឹង 4

-ករណី n សេសគឺ$n=2k+1, k\in\mathbb{N}$គេបាន :

$N=(2k+1)^2(2k+1-1)(2k+1+1)=(2k+1)^2(2k)(2k+2)$

$=4k(2k+1)^2(k+1)$ចែកដាច់នឹង 4

សរុបមក N ចែកដាច់នឹង 4 (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\forall n\in\mathbb{N}$ គេអាចសរសេរ nជារាង

$3k, 3k+1, 3k+2$ ដែល $k\in\mathbb{N}$

-ករណី $n=3k$ នោះ N ចែកដាច់នឹង 3

-ករណី $n = 3k + 1$ នាំឲ្យ $n - 1 = 3k$ នោះ N ចែកដាច់នឹង 3

-ករណី $n = 3k + 2$ នាំឲ្យ $n + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ នោះ N ចែកដាច់នឹង 3

សរុបមក N ចែកដាច់នឹង 3 (2)

តាម (1) & (2) យើងបាន $n^4 - n^2$ ចែកដាច់នឹង 12 ។

3. បង្ហាញថា $n(n + 1)(2n + 1)$ ចែកដាច់នឹង 6 ។

ដំណោះស្រាយ

យើងត្រូវស្រាយថា $N = n(n + 1)(2n + 1)$ ចែកដាច់នឹង 2 និង 3

ដោយ N ចែកដាច់នឹង 2 ព្រោះ

-បើ nគូគឺ $n = 2k$ នាំឲ្យ $N = 2k(2k + 1)(2(2k) + 1)$ ចែកដាច់នឹង 2

-បើnសេសគឺ $n = 2k + 1$ នាំឲ្យ

$$N = (2k + 1)(2k + 1 + 1)(2(2k + 1) + 1)$$
$$= 2(2k + 1)(k + 1)(4k + 3)$$ ចែកដាច់នឹង 2

សរុបមក N ចែកដាច់នឹង 2 (1)

ម្យ៉ាងទៀត

-បើ $n = 3k$ នាំឲ្យ N ចែកដាច់នឹង 3

-បើ $n = 3k + 1$ នាំឲ្យ $N = (3k + 1)(3k + 1 + 1)(2(3k + 1) + 1)$

$= 3(3k + 1)(3k + 2)(2k + 1)$ ចែកដាច់នឹង 3

-បើ $n = 3k + 2$ នាំឲ្យ $N = (3k + 2)(3k + 2 + 1)(2(3k + 2) + 1)$

$= 3(3k + 2)(k + 1)(6k + 5)$ ចែកដាច់នឹង 3

សរុបមក N ចែកដាច់នឹង 3 (2)

តាម (1) & (2) យើងបាន $n(n + 1)(2n + 1)$ ចែកដាច់នឹង 6 ។

4. បង្ហាញថា $n^5 - n$ ចែកដាច់នឹង 30 ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $N = n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$

$$= n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$$

យើងនឹងបង្ហាញថា N ចែកដាច់នឹង5 និង 6

-បើ $n = 6k, k \in \mathbb{N}$ នាំឲ្យ $N = 6k(6k - 1)(6k + 1)((6k)^2 + 1)$ ចែកដាច់នឹង 6

-បើ $n = 6k + 1, k \in \mathbb{N}$ នាំឲ្យ

$$N = (6k + 1)(6k + 1 - 1)(6k + 1 + 1)((6k + 1)^2 + 1$$

$= 6k\,(6k + 1)\,(6k + 2)\,((6k+1)^2+1)$ចែកដាច់នឹង 6

-បើ $n = 6k + 2, k \in \mathbb{N}$នាំឲ្យ

$N = (6k + 2)\,(6k + 2 - 1)\,(6k + 2 + 1)\,((6k+2)^2+1)$
$= 6(3k + 1)\,(6k + 1)\,(2k + 1)\,((6k+2)^2+1)$ចែកដាច់នឹង 6

-បើ $n = 6k + 3, k \in \mathbb{N}$នាំឲ្យ

$N = (6k + 3)\,(6k + 3 - 1)\,(6k + 3 + 1)\,((6k+3)^2+1)$
$= 6\,(2k + 1)\,(3k + 1)\,(6k + 4)\,((6k+3)^2+1)$ចែកដាច់នឹង 6

-បើ $n = 6k + 4, k \in \mathbb{N}$នាំឲ្យ

$N = (6k + 4)\,(6k + 4 - 1)\,(6k + 4 + 1)\,((6k+4)^2+1)$
$= 6\,(3k + 2)\,(2k + 1)\,(6k + 5)\,((6k+4)^2+1)$ចែកដាច់នឹង6

-បើ $n = 6k + 5, k \in \mathbb{N}$នាំឲ្យ

$N = (6k + 5)\,(6k + 5 - 1)\,(6k + 5 + 1)\,((6k+5)^2+1)$
$= 6\,(6k + 5)\,(6k + 4)\,(k + 1)\,((6k+5)^2+1)$ចែកដាច់នឹង 6

សរុបមក$N = n\,(n-1)\,(n+1)\,(n^2+1)$ចែកដាច់នឹង 6 (1)

ម្យ៉ាងទៀត

-បើ $n = 5k, k \in \mathbb{N}$នាំឲ្យ $N = 5k\,(5k - 1)(5k + 1)((5k)^2+1)$ចែកដាច់នឹង 5

-បើ $n = 5k + 1, k \in \mathbb{N}$នាំឲ្យ

$N = (5k + 1)\,(5k + 1 - 1)\,(5k + 1 + 1)\,((5k+1)^2+1)$
$= 5k\,(5k + 1)\,(5k + 2)\,((5k+1)^2+1)$ចែកដាច់នឹង 5

-បើ $n = 5k + 2, k \in \mathbb{N}$នាំឲ្យ

$N = (5k + 2)(5k + 2 - 1)(5k + 2 + 1)((5k+2)^2+1)$
$= (5k + 1)\,(5k + 2)\,(5k + 3)\,((5k+2)^2+1)$
$= (5k + 1)\,(5k + 2)\,(5k + 3)\,(25k^2+20k+5)$
$= 5(5k + 1)\,(5k + 2)\,(5k + 3)\,(5k^2+4k+1)$ចែកដាច់នឹង5

-បើ $n = 5k + 3, k \in \mathbb{N}$នាំឲ្យ

$N = (5k + 3)(5k + 3 - 1)(5k + 3 + 1)((5k+3)^2+1)$
$= (5k + 2)\,(5k + 3)\,(5k + 4)\,(25k^2+30k+10)$
$= 5(5k + 1)\,(5k + 2)\,(5k + 3)\,(5k^2+5k+2)$ចែកដាច់នឹង5

-បើ $n = 5k + 4, k \in \mathbb{N}$នាំឲ្យ

$N = (5k + 4)\,(5k + 4 - 1)\,(5k + 4 + 1)\,((5k+4)^2+1)$
$= 5\,(5k + 4)\,(5k + 3)\,(k + 1)\,((5k+4)^2+1)$ចែកដាច់នឹង5

សរុបមក $N = n\,(n-1)\,(n+1)\,(n^2+1)$ចែកដាច់នឹង 5 (2)

តាម (1) & (2) គេបាន$n^5 - n$ចែកដាច់នឹង 30 ។

5. បង្ហាញថា $13^{1985} + 13^{1986} + \cdots + 13^{1992}$ចែកដាច់នឹង 170 ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $13^{1985}+13^{1986}+\cdots+13^{1992}=13^{1985}(1+13+13^2+\cdots+13^7)$

$=13^{1985}\times\frac{13^8-1}{13-1}$

$=13^{1985}x6797756$

$=399868\times170\times13^{1985}$ចែកដាច់នឹង 170។

ដូចនេះ $13^{1985}+13^{1986}+\cdots+13^{1992}$ចែកដាច់នឹង 170 ។

6. គ្រប់ n ជាចំនួនគត់ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $n\,(n^4-1)$ ចែកដាច់នឹង 5 ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $n\,(n^4-1)=n^5-n$តាមសំរាយនៅលំហាត់ទី 4 ខាងលើ

$\mathrm{n}^5-\mathrm{n}$ ចែកដាច់នឹង 5

ដូចនេះ $n(n^4-1)$ ចែកដាច់នឹង 5 ។

7. គ្រប់ n ជាចំនួនគត់ ស្រាយបញ្ជាក់ថា 4^n+6n-1ចែកដាច់នឹង 9 ។

ដំណោះស្រាយ

-បើ $n=0$ នោះ $4^0+6\times0-1=0$ចែកដាច់នឹង9

-បើ $n=1$ នោះ $4^1+6\times1-1=9$ចែកដាច់នឹង 9

ឧបមាថាដល់ $n=k$ គឺ 4^k+6k-1ចែកដាច់នឹង 9

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n=k+1$គឺ

$$4^{k+1}+6(k+1)-1=4\times4^k+6k+5=4(4^k+6k-1)-18k+9$$
$$=4(4^k+6k-1)-9\,(2k-1)$$

ដោយ (4^k+6k-1) ចែកដាច់នឹង 9 និង $9\,(2k-1)$ ចែកដាច់នឹង 9 នោះ $4^{k+1}+6(k+1)-1$ ចែកដាច់នឹង 9

ដូចនេះ 4^n+6n-1ចែកដាច់នឹង 9 ។

8. គ្រប់ a និង b ជាចំនួនគត់ ស្រាយបញ្ជាក់ $ab(a^2-b^2)$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $N=ab(a^2-b^2)=ab(\mathrm{a}^2-1-\mathrm{b}^2+1)=\mathrm{ab}[(\mathrm{a}^2-1)-(\mathrm{b}^2-1)]$

$=ab(a-1)(a+1)-ab(b-1)(b+1)$

យើងបាន $ab(a-1)(a+1)$ និង $ab(b-1)(b+1)$ ចែកដាច់នឹង 3

ព្រោះគ្រប់ $a \in \mathbb{N}$ គេបាន

- $a = 3k$ នោះ $a(a-1)(a+1) = 3k(3k-1)(3k+1)$ ចែកដាច់នឹង 3
- $a = 3k+1$ នោះ $a(a-1)(a+1) = (3k+1)(3k+1-1)(3k+1+1)$

$= 3k(3k+1)(3k+2)$ ចែកដាច់នឹង 3
- $a = 3k+2$ នោះ $a(a-1)(a+1) = (3k+2)(3k+2-1)(3k+2+1)$

$= 3(3k+2)(3k+1)(k+1)$ ចែកដាច់នឹង 3

ដូចគ្នាដែរចំពោះ $ab(b-1)(b+1)$

នាំឲ្យ $N = ab(a-1)(a+1) - ab(b-1)(b+1)$ ចែកដាច់នឹង 3

ដូចនេះ $ab(a^2 - b^2)$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

9. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $34^{57} - 1$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $34^{57} - 1 = (34-1)(34^{56} + 34^{55} + \cdots + 1)$

$= 3 \times 11\,(34^{56} + 34^{55} + \cdots + 1)$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

ដូចនេះ $34^{57} - 1$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

10. បើ k ជាចំនួនគត់ រកសំណល់ក្នុងវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនិង 9 នៃចំនួន
$65^{6k}, 65^{6k+1}, 65^{6k+2}, 65^{6k+3}, 65^{6k+4}, 65^{6k+5}$

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $65 = 7 \times 9 + 2$ យើងបាន $65 \equiv 2 \pmod 9$

នាំឲ្យ $65^2 = 65 \times 65 = 2 \times 2 \equiv 4 \pmod 9$

$65^3 = 65^2 \times 65 = 4 \times 2 \equiv 8 \pmod 9$

$65^4 = 65^3 \times 65 = 8 \times 2 = 16 \equiv 7 \pmod 9$ ព្រោះ $16 \equiv 7 \pmod 9$

$65^5 = 65^4 \times 65 = 7 \times 2 = 14 \equiv 5 \pmod 9$ ព្រោះ $14 \equiv 5 \pmod 9$

$65^6 = 65^5 \times 65 = 5 \times 2 = 10 \equiv 1 \pmod 9$ ព្រោះ $10 \equiv 1 \pmod 9$

$65^7 = 65^5 \times 65 = 1 \times 2 \equiv 2 \pmod 9$ យើងឃើញថាវាមានខួបស្មើ6

ដូចនេះ

65^{6k} មានសំណល់ស្មើ 1 ពេលចែកនឹង 9 តាមបែបអឺគ្លីត

65^{6k+1} មានសំណល់ស្មើ 2 ពេលចែកនឹង 9 តាមបែបអឺគ្លីត

65^{6k+2} មានសំណល់ស្មើ 4 ពេលចែកនឹង 9 តាមបែបអឺគ្លីត

65^{6k+3} មានសំណល់ស្មើ 8 ពេលចែកនឹង 9 តាមបែបអឺគ្លីត

65^{6k+4} មានសំណល់ស្មើ 7 ពេលចែកនឹង 9 តាមបែបអឺគ្លីត

65^{6k+5} មានសំណល់ស្មើ 5 ពេលចែកនឹង 9 តាមបែបអឺគ្លីត

11. រកសំណល់ក្នុងវិធីចែកនឹង 4 នៃ$437^{25} + 214^{29}$។

ដំណោះស្រាយ

រកសំណល់នៃការចែកនឹង 4 នៃ 437^{25}

ដោយ $437 = 4 \times 109 + 1$មានសំណល់ 1

នាំឲ្យ $437^2 = 437 \times 437 = (4 \times 109 + 1)(4 \times 109 + 1)$

$= 4 \times 47742 + 1$ មានសំណល់ 1

តាមលំនាំខាងលើ យើងបាន $\forall n \in \mathbb{N}, 437^n$ចែក 4 មានសំណល់ស្មើ 1 នោះ 437^{25} ចែកនឹង 4 មានសំណល់ 1

រកសំណល់នៃការចែក 4 នឹង 214^{29}

ដោយ $241 = 4 \times 53 + 2$មានសំណល់ស្មើ 2

$241^2 = 4 \times 11449 + 0$ មានសំណល់ស្មើ 0

$241^3 = 241^2 \times 214$ ចែកដាច់ 4 មានសំណល់ស្មើ 0

តាមលំនាំនេះ $\forall n > 1, n \in \mathbb{N}$គេបាន 214^nចែកដាច់នឹង 4 មានសំណល់ស្មើ 0

នោះ214^{29} ចែកដាច់នឹង 4 មានសំណល់ស្មើ 0

ដូចនេះ $437^{25} + 214^{29}$ ចែកដាច់នឹង 4 មានសំណល់ស្មើ 1 + 0 = 1។

12. រកសំណល់ក្នុងវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃចំនួនខាងក្រោម

ក. 3286^{374} និង 10

ខ. 371^{238} និង 5

គ. 76^{784} និង12

ឃ. 42573^{17} និង

ដំណោះស្រាយ

រកសំណល់ក្នុងវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃចំនួនខាងក្រោម

ក. 3286^{374} និង 10

ដោយ $3286 = 328 \times 10 + 6$ មានសំណល់ 6

$3286^2 = (328 \times 10 + 6)^2$

$$= 10^2 \times 328^2 + 2 \times 10 \times 328 \times 6 + 36$$
$$= 10\,(10 \times 328^2 + 12 \times 328 + 3) + 6$$មានសំណល់ 6

តាមនលំនាំនេះ $\forall n \in N$ យើងបាន 3286^n ចែកនឹង 10 មានសំណល់ 6

ដូចនេះ 3286^{374} ចែកនឹង 10 មានសំណល់ 6 ។

ខ. 371^{238} និង 5

យើងមាន $371 \equiv 1\ (mod\ 5)$ នាំឲ្យ $371^{238} \equiv 1^{238} (mod\ 5)$

នោះ $371^{238} \equiv 1\ (mod\ 5)$

ដូចនេះ 371^{238} ចែកនឹង 5 មានសំណល់ 1 ។

គ. 76^{784} និង12

ដោយ $76 = 6 \times 12 + 4$ មានសំណល់4

$$76^2 = (6 \times 12 + 4)^2 = 6^2 \times 12^2 + 2 \times 4 \times 6 \times 12 + 16$$
$$= 6\,(6 \times 12^2 + 8 \times 12 + 2) + 4$$មានសំណល់ 4

តាមលំនាំខាងលើ យើងបាន 76^{784} ចែកនឹង12 មានសំណល់ 4 ។

ឃ. 42573^{17} និង 9

ដោយ $42573 = 9 \times 4730 + 3$ មានសំណល់3

$$42573^2 = (9 \times 4730 + 3)^2 = 9\,(9 \times 4730^2 + 6 \times 4730 + 1) + 0$$មានសំណល់ 0

យើងបាន $\forall n \geq 2$ គេបាន42573^nចែកដាច់នឹង9

ដូចនេះ 42573^{17}ចែកដាច់នឹង9 ។

13. កំណត់ផលចែក q និងសំណល់ r នៃវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃចំនួន a និង bដូចខាងក្រោម

ក. $a = 194, b = 7$ ខ. $a = -371, b = 21$ គ. $a = 487, b = 9$ ឃ. $a = -734, b = 5$ ង. $a = 973, b = 17$ ច. $a = -849$, b = ឆ. $a = 569, b = 7$ ជ. $a = -671, b = 6$ ។

ដំណោះស្រាយ

បើ a ចែកនឹង b តាមបែបអឺគ្លីត ហើយមានសំណល់ r និងមានផលចែក q គេបាន $a = bq + r$ ដែល 0≤ $r < b$ ។

ក. $a = 194, b = 7$

ដោយ $194 = 7 \times 27 + 5$ យើងបាន $q = 27; r = 5$

ខ. $a = -371, b = 21$

ដោយ $-371 = 21 \times (-18) + 7$ យើងបាន $q = -18; r = 7$

គ. $a = 487, b = 9$

ដោយ $487 = 9 \times 54 + 1$ យើងបាន $q = 54; r = 1$

ឃ. $a = -734, b = 5$

ដោយ $-734 = 5 \times (-147) + 1$ យើងបាន $q = -147; r = 1$

ង. $a = 973, b = 17$

ដោយ $973 = 17 \times 57 + 4$ យើងបាន $q = 57; r = 4$

ច. $a = -849, b = 13$

ដោយ $-849 = 5 \times (-66) + 9$ យើងបាន $q = -66; r = 9$

ឆ. $a = 569, b = 7$

ដោយ $569 = 7 \times 81 + 2$ យើងបាន $q = 81; r = 2$

ជ. $a = -671, b = 6$

ដោយ $-671 = 6 \times (-112) + 1$ យើងបាន $q = -112; r = 1$

14. កំណត់សំណុំនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបnដែល $1000 < n < 1080$ និងសំណល់ក្នុងវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនិង 17 គឺ 3 ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយវិធីចែកអឺគ្លីត n និង 17 មានសំណល់ 3 យើងបាន $n = 17q + 3$

តែ $1000 < n < 1080$ នោះ $1000 < 17q + 3 < 1080$

នាំឲ្យ $997 < 17q < 1087$

យើងបាន $58.64 < q < 63.35$ និង $q \in \mathbb{Z}$

ដូចនេះ $q = \{59, 60, 61, 62, 63\}$

បើ $q = 59$ នោះ $n = 17 \times 59 + 3 = 1006$

បើ $q = 60$ នោះ $n = 17 \times 60 + 3 = 1023$

បើ $q = 61$ នោះ $n = 17 \times 61 + 3 = 1040$

បើ $q = 62$ នោះ $n = 17 \times 62 + 3 = 1057$

បើ $q = 63$ នោះ $n = 17 \times 63 + 3 = 1074$

15. កំណត់គ្រប់គូចំនួនគត់ធម្មជាតិ (x, y) ដែល $7x + y = 37$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $7x + y = 37$

នាំឲ្យ $x = \frac{37-y}{7} = 5 - \frac{y-2}{7}$

តែ $x \in \mathbb{N}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} \frac{y-2}{7} \in \mathbb{N} \\ \frac{y-2}{7} \le 5 \end{cases}$

តាង $\frac{y-2}{7} = k, k \in \mathbb{N}$ គេបាន $\begin{cases} \frac{y-2}{7} = k \\ k \le 5 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} y = 7k + 2 \\ k = \{5, 4, 3, 2, 1, 0\} \end{cases}$

ដូចនេះ $x = 5 - k$ និង $y = 7k + 2$ ដែល $k = \{5,4,3,2,1,0\}$

បើ $k = 5$ នោះ $x = 0; y = 37$

បើ $k = 4$ នោះ $x = 1; y = 30$

បើ $k = 3$ នោះ $x = 2; y = 23$

បើ $k = 2$ នោះ $x = 3; y = 16$

បើ $k = 1$ នោះ $x = 4; y = 9$

បើ $k = 0$ នោះ $x = 5; y = 2$

16. កំណត់ផលចែកនិងសំណល់នៃវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃ 456 និង 29 ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $456 = 29 \times 15 + 12$ យើងបាន $q = 15; r = 12$ ។

17. កំណត់តួចែកនិងសំណល់ដូចខាងក្រោម:

ដំណោះស្រាយ

ក. តំណាងចែកគឺ 1753 និងផលចែកគឺ 34

តាង b ជាតួចែកនិង r ជាសំណល់ដែល $b\in\mathbb{N}, 0\leq r<b$

យើងបាន $1753 = 34b + r$ នាំឲ្យ $b=\frac{1753-r}{34}=51-\frac{r-19}{34}\leq 51$

ដោយ $b\in\mathbb{N}$ នោះ $\begin{cases}\frac{r-19}{34}\in\mathbb{N}\\ \frac{r-19}{34}\leq 51\end{cases}$

តាង $\frac{r-19}{34}=k\in\mathbb{N}$ នាំឲ្យ $r=34k+19$

តែ $0\leq r<b$ នាំឲ្យ $0\leq r<51$

គេបាន $0\leq 34k+19<51$ នោះ $-19\leq 34k<32$

$0\leq 34k<32$ នោះ $0\leq k<\frac{32}{34}=0.9$ នាំឲ្យ $k=0$

បើ $k=0$ នោះ $r=34\times 0+19=19$ និង $b=51-\frac{19-19}{34}=51$

ដូចនេះ $b=51; r=19$ ។

ខ. តំណាងចែកគឺ 2137 និងផលចែកគឺ 79។

តាង b ជាតួចែកនិង r ជាសំណល់ដែល $b\in\mathbb{N}, 0\leq r<b$

យើងបាន $2137 = 79b + r$ នាំឲ្យ $b=\frac{2137-r}{79}=27-\frac{r-4}{79}\leq 27$

ដោយ $b\in\mathbb{N}$ នោះ $\begin{cases}\frac{r-4}{79}\in\mathbb{N}\\ \frac{r-4}{79}\leq 27\end{cases}$

តាង $\frac{r-4}{79}=k\in\mathbb{N}$ នាំឲ្យ $r=79k+4$

តែ $0\leq r<b$ នាំឲ្យ $0\leq r<27$

គេបាន $0\leq 79k+4<27$ នោះ $-4\leq 79k<23$

$0\leq 79k<23$ នោះ $0\leq k<\frac{23}{79}=0.2$ នាំឲ្យ $k=0$

បើ $k=0$ នោះ $r=79\times 0+4=4$ និង $b=27-\frac{4-4}{79}=27$

ដូចនេះ $b=27; r=4$ ។

មេរៀនទី២: ចំនួនបឋម

ដំណោះស្រាយលំហាត់

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន 937 និង 1933 ជាចំនួនបឋម។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា 937 និង 1933 ជាចំនួនបឋម

ដោយ 937 ចែកដាច់មិននឹងចំនួនបឋម 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29 ទេ និង

29 ជាចំនួនបឋម

ដែល $29^2=841>937$

ដូចគ្នាដែរ 1933 ចែកមិនដាច់នឹង ចំនួនបឋម 2;3;5;7;9;11;13;17;19;23;29;31;37;39;41;43 ទេ

ហើយ 43 ជាចំនួនបឋម

ដែល $43^2=1849<1933$

ដូចនេះ 937 និង 1933 ជាចំនួនបឋម

2. តើចំនួន 3411; 2677និង 191 ជាចំនួនបឋមរឺ ទេ?

ដំណោះស្រាយ

តើចំនួន 3411; 2677 និង 191ជាចំនួនបឋមរឺ ទេ?

យើងឃើញថា៖

3411 មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ព្រោះ 3+4+1+1=9 ចែកដាច់នឹង 3

2677ចែកមិនដាច់នឹងចំនួនបឋម 2;3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;37;41;43;47;51

ដែល 51 ជាចំនួនបឋម

ដែល $51^2=2601<2677$

191 ចែកមិនដាច់នឹងចំនួនបឋម2;3;5;7;11;13

ដែល13 ជាចំនួនបឋម

ដែល $13^2=169<191$

ដូចនេះ 3411 មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ

2677និង 191 ជាចំនួនបឋម

3. គេអោយសំនុំ E={122; 123; 124; 125; 126}។ តើសំនុំEមានធាតុជាចំនួន បឋមឬទេ?

ដំណោះស្រាយ

E={122; 123; 124; 125; 126}

ដោយ 122; 124; 126 ជាចំនួនគូ

នោះវាជាចំនួនដែលចែកដាច់នឹង 2

គេបាន 122; 124; 126មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ

123 ជាចំនួនដែលចែកដាច់នឹង 3

គេបាន 123 ក៏មិនមែនជាចំនួនបឋមដែរ

125 ជាចំនួនដែលចែកដាច់ នឹង 5

គេបាន 125 ក៏មិនមែនជាចំនួនបឋមដែរ

ដូចនេះ E ជាសំនុំដែលមានធាតុ មិនមែនជាចំនួនបឋម

4. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាសំនុំ E={5042; 5043; 5044; 5045; 5046; 5047} គ្មានធាតុជា ចំនួនបឋម។

ដំណោះស្រាយ

យើងសង្កេតឃើញថា៖

5042; 5044; 5046 ជាចំនួនគូ

នោះ វាជាចំនួនដែលចែកដាច់នឹង2

គេបាន៖ 5042; 5044; 5046 មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ

5043 មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ព្រោះ 5+0+4+3=12ចែកដាច់នឹង3

នោះ 5043 មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ

5045 ជាចំនួនដែលចែកដាច់នឹង 5

នោះ 5045 ក៏មិនមែនជាចំនួនបឋមដែរ

ដូចនេះ E ជាសំនុំដែលគ្មានធាតុជាចំនួនបឋម

5. បំបែកចំនួន 126; 525 និង 720 ជាផលគុណកត្តាបឋម។

$126=2\times3^2\times7$

$525=3\times5^2\times7$

$720=2^4\times3^2\times5$

6. បំបែកចំនួន 5042 និង 6045 ជាផលគុណកត្តាបឋម។

$5024=2\times25\times21$

$6045=3\times5\times403$

7. បំបែក 925925 និង 253253 ជាផលគុណកត្តាបឋម។

$925925=5^2\times7\times11\times13\times37$
$253253=7\times11^2\times13\times23$

8. បំបែកចំនួន 5!,6! និង7! ជាផលគុណកត្តាបឋម។

$5!=1\times2\times3\times4\times5=2^2\times3\times5$

$6!=1\times2\times3\times4\times5\times6=2^4\times3^2\times5$
$7!=6!\times7=2^4\times3^2\times5\times7$

9. ចូរកំណត់ចំនួនបឋមដែលតូចជាង100។

ចំនួនបឋមដែលតូចជាង100មាន2;3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;37;39;41;43;47;51;
53;59;61;67;71;73;79;83;89;91;97។

10. n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែល $n\geq3$ ។ បង្ហាញថាបើnជាចំនួនបឋម នោះ n+1 មិនមែនជាចំនួនបឋម។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាបើ nជាចំនួនបឋមនោះn+1មិនមែនជាចំនួនបឋម

ដោយ $n\geq3, n\in IN$ និង n បឋមនោះ n ជាចំនួនសេស

តាង $n=2k+1$, $k\in Z$

$\Rightarrow n+1=2k+2=2(k+1)$ចែកដាច់នឹង 2

ដូចនេះ n+1 មិនបឋម។

11. n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែល $n\geq 3$ ។ បង្ហាញថាបើ n ជាចំនួនបឋមនោះ $n+3$ មិនមែនជាចំនួនបឋម។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាបើ n ជាចំនួនបឋមនោះ $n+3$ មិនមែនជាចំនួនបឋម

ដោយ $n\geq 3, n\in IN$ និង n បឋមនោះ n ជាចំនួនសេស

តាង $n=2k+1$,$k\in Z$

$\Rightarrow n+1=2k+4=2(k+2)$ ចែកដាច់នឹង 2

ដូចនេះ $n+3$ មិនបឋម។

12. n ជាចំនួនបឋម។បង្ហាញថា n^2 មិនមែនជាចំនួនបឋម។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា n ជាចំនួនបឋមនោះ n^2 មិនមែនជាចំនួនបឋម។

ដោយ $n\geq 3, n\in IN$ និង n បឋមនោះ n^2 ត្រូវតែចែកដាច់នឹង n

ដូចនេះ n^2 មិនមែនជាចំនួនបឋម។

13. n ជាចំនួនបឋម ដែល $n\geq 3$។ បង្ហាញថា n^2+1 និង n^2-1 មិនមែនជាចំនួនបឋម។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា n^2+1 និង n^2-1 មិនមែនជាចំនួនបឋម

ដោយ $n\geq 3, n\in IN$ និង n បឋមនោះ n ជាចំនួនសេស

តាង $n=2k+1$,$k\in Z$

$\Rightarrow n^2+1=(2k+1)^2+1=4k^2+4k+2=2(2k^2+2k+1)$ ចែកដាច់នឹង 2

$\Rightarrow n^2-1=(2k+1)^2-1=4k^2+4k=2(2k^2+2k)$ ចែកដាច់នឹង 2

ដូចនេះ n^2+1 និង n^2-1 មិនមែនជាចំនួនបឋម។

14. តាង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែល $n\geq 3$។ តើ n^2-n ជាចំនួនបឋមឬទេ?

ដំណោះស្រាយ

n^2-n ជាចំនួនបឋមឬទេ?

ដោយ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែល $n\geq 3$ យើងបាន

$n^2-n=n(n-1)$ ចែកដាច់នឹង n និង $(n-1)$

ដូចនេះ n^2-n មិនមែនជាចំនួនបឋម។

15. តាង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែល $n\geq4$។ តើ n^2-4n+3 ជាចំនួនបឋមឬទេ?

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $n^2-4n+3=(n-1)(n-3)$ ចែកដាច់នឹង n-1 និង n-3

ដូចនេះn^2-4n+3 មិនមែនជាចំនួនបឋម

16. តាង p ជាចំនួនបឋម ហើយ f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x)=\frac{2x^2+p}{x}$

ក. រកf(1) និង f(p)

ខ.បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ផ្សេងពី p និង 1បាន $f(n)\in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកf(1) និង f(p)

$$f(1)=\frac{2\times1+p}{1}=2+p$$

$$f(p)=\frac{2p^2+p}{p}=2p+1$$

ខ. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ផ្សេងពី p និង 1 គេបាន $f(n)\in IN$

គេបាន

$$f(n)=\frac{2n^2+p}{n}, n\in IN$$

$\Rightarrow f(n)=2n+\frac{p}{n}$ ដែល p ជាចំនួនបឋម

-បើ n ជាចំនួនបឋម $\Rightarrow \frac{p}{n}\notin IN$ $\Rightarrow 2n+\frac{p}{n}\notin IN$ ឬ $f(n)\notin IN$

-បើ n មិនបឋម នោះ $\exists b\in IN$និងbជាចំនួនបឋមដែល$b/n, b^2\leq n$

$\Rightarrow n=nq,\ q\in IN$

$\Rightarrow \frac{p}{n}=\frac{p}{bq}=\frac{1}{q}\times\frac{p}{b}\notin IN$ ព្រោះ $\frac{1}{q}\notin IN$

$\Rightarrow 2n+\frac{p}{n}\notin IN$ ឬ $f(n)\notin IN$

សរុបមក $\forall n\in IN, f(n)\in IN$

17. រកតម្លៃអប្បបរមានៃk ដែលធ្វើឱ្យ 30k ជាការេប្រាកដ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃអប្បបរមានៃk ដែលធ្វើឱ្យ 30k ជាការេប្រាកដ

យើងមាន $30=2\times3\times5$

$\Rightarrow 30k=2\times3\times5\times k$

ដើម្បីឱ្យ 30k ជាការេប្រាកដ យើងបាន

$2\times3\times5\times k=a^2 \Rightarrow k=\frac{30^2}{30}\,\frac{a^2}{30} \Rightarrow a$ ជាពហុគុណនៃ 30

$\Rightarrow a\in\{30;60;90;\ldots\ldots\ldots\}$

តែ a=30 ជាតម្លៃអប្បបរមា $k=\frac{30^2}{30}=30$

ដូចនេះ k=30

18. រកគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប x ដែល x^2-2x+2 ជាចំនួនបឋមតូចជាង 10។

ដំណោះស្រាយ

រកគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប x

ដោយ ចំនួនបឋមតូចជាង 10 មាន 2,3,5,7 យើងបាន

- ករណី $x^2-2x+2=2 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=0;x=2$
- ករណី $x^2-2x+2=3 \Rightarrow x^2-2x+1=0$

$\Delta=(-2)^2-4(-1)=8$

$\Rightarrow x=1\pm2\sqrt{2}\notin IN$ មិនយក

-ករណី $x^2-2x+2=7 \Rightarrow x^2-2x-5=0$

$\Delta=(-2)^2-4(-5)=4+20=24$

$\Rightarrow x=1\pm2\sqrt{6}$

ដូចនេះ $x=\{-1;0;2;3\}$

19. តើចំនួន n!+1ជាចំនួនបឋមឬទេ ចំពោះ $n\in\{1;3;4;5;6\}$?

ដំណោះស្រាយ

បើ $n=1\Rightarrow n!+1=2$ ជាចំនួនបឋម

បើ $n=3\Rightarrow n!+1=3!+1=7$ជាចំនួនបឋម

បើ $n=4\Rightarrow n!+1=4!+1=25$មិនមែនជាចំនួនបឋម

បើ $n=5\Rightarrow n!+1=5!+1=121$មិនមែនជាចំនួនបឋម

បើ $n=6\Rightarrow n!+1=6!+1=721$មិនមែនជាចំនួនបឋម

20. p ជាចំនួនបឋមតូចជាង 10 ។ បង្ហាញថា 2^p-2 ចែកដាច់នឹង p។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា 2^p-2 ចែកដាច់នឹង p

ចំនួនបឋមតូចជាង 10 រួមមាន 2,3,5,7

-បើ $p=2 \Rightarrow 2^p-2=2^2-2=2$ ចែកដាច់នឹង 2

-បើ p=3 => $2^p-2=2^3-2=6$ ចែកដាច់នឹង 3

-បើ p=5 => $2^p-2=2^5-2=30$ ចែកដាច់នឹង 5

-បើ p=7 => $2^p-2=2^7-2=126$ ចែកដាច់នឹង 7

21. រកសំនុំតួចែកនៃ 720 ។

យើងបាន៖

ចំនួនតួចែកទាំងអស់នៃ 720 គឺ:(4+1)(2+1)(1+1)=30តួ

22. បំបែកចំនួនខាងក្រោមជាកត្តាបឋម រួចរកចំនួនតួចែកនៃចំនួនខាងក្រោម នេះ៖

ក. 360

ខ. 1350

គ. 1500

ឃ. 2700

ដំណោះស្រាយ

ក. ដោយ $360=2^3\times3^2\times5$

នោះចំនួនតួចែកសរុបមាន (3+1)(2+1)(1+1)=24

ខ. ដោយ$1350=2\times3^3\times5^2$

នោះចំនួនតួចែកសរុបមាន (1+1)(3+1)(2+1)=24

គ. ដោយ $1500=2^2\times3\times5^3$

នោះចំនួនតួចែកសរុបមាន (2+1)(1+1)(3+1)=24

ឃ. ដោយ $2700=2^2\times3^3\times5^2$

នោះចំនួនតួចែកសរុបមាន (2+1)(3+1)(2+1)=36

23. បង្ហាញថាចំពោះ x=1;x=2;x=3 ប្រភាគ $\frac{36X+25}{20X}=13$ ជាប្រភាគសម្រួល មិនបាន។

ដំណោះស្រាយ

-បើ x=1 $\Rightarrow \frac{36x+25}{20x}=\frac{36+25}{20}=\frac{61}{20}$ ជាប្រភាគសំរួលមិនបាន

-បើx=2 $\Rightarrow \frac{36x+25}{20x}=\frac{36x2+25}{20x2}=\frac{97}{40}$ ជាប្រភាគសំរួលមិនបាន

-បើx=3 $\Rightarrow \frac{36x+25}{20x}=\frac{36x3+25}{20x3}=\frac{133}{60}$ ជាប្រភាគសំរួលមិនបាន

24. រកចំនួនគត់ធម្មជាតិn ដែលនាំអោយប្រភាគ $\frac{n^2+n+6}{n+1}$ ក្លាយទៅជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនគត់ធម្មជាតិn

ដោយ $\frac{n^2+n+6}{n+1}=\frac{n(n+1)+6}{n+1}=n+\frac{6}{n+1}$

ដើម្បីអោយ $\frac{n^2+n+6}{n+1}\in IN$ លុះត្រាតែ $\frac{6}{n+1}\in IN$

នោះn+1គឺជាតួចែកនៃ6

ម៉្យាងវិញទៀតតួចែកនៃ6 មាន 1,2,3,6

-បើ n+1=6=>n=0

-បើn+1=2=>n=1

-បើn+1=3=>n=2

-បើn+1=6=>n=5

ដូចនេះ n={0;1;2;5}

25. សំរួលប្រភាគខាងក្រោម៖

ក. $\frac{474}{534}$

ខ. $\frac{1005}{885}$

គ. $\frac{1020}{1260}$

ឃ. $\frac{51300}{16650}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\frac{474}{534}=\frac{2\times3\times79}{2\times3\times89}=\frac{79}{89}$

ខ. $\frac{1005}{885}=\frac{3\times5\times67}{3\times5\times59}=\frac{67}{59}$

គ. $\frac{1020}{1260}=\frac{2^2\times3\times5\times17}{2^2\times3^2\times5\times7}=\frac{17}{21}$

ឃ. $\frac{51300}{16650}=\frac{2^2\times3^3\times5^2\times19}{2\times3^2\times5^2\times37}=\frac{114}{37}$

មេរៀនទី៣: តួចែករួម និងពហុគុណរួម

ដំណោះស្រាយលំហាត់

1. កំនត់សំនុំតួចែកនៃ 375 និង 2070 រួចទាញរកសំណុំតួចែករួមនៃសំណុំ ទាំងនោះ។

ដោយ $375 = 3\times 5^3$

យើងបានចំនួនតួចែកសរុបគឺ $(3+1)(1+1)=8$

មាន $\{1;3;5;15;25;75;125;375\}$

ដោយ $2070 = 2\times 3^2\times 5\times 23$

យើងបានសំណុំតួចែកសរុបគឺ $(1+1)(2+1)(1+1)(1+1)=24$ មាន

$\{1;2;3;5;6;9;10;15;18;23;30;45;46;69;90;115;138;148;207;230;345;414;1035;2070\}$

2. កំនត់សំណុំតួចែករួមនៃ 1625 និង 825 ។

ដោយ $1625 = 825\times 1+800$

យើងបាន

សំណុំតួចែករួមនៃ 1625 និង 825 គឺជាសំណុំតួចែករួមនៃ 825 និង 800

ម្យ៉ាងទៀត $825 = 3\times 5^2\times 11$

$800 = 2^5\times 5^2$

គេបានសំណុំតួចែកនៃ 825 និង 800 គឺ $\{5;25\}$

ដូចនេះ សំណុំតួចែករួមនៃ 1625 និង 825 គឺ $\{5;25\}$

3. បំបែកចំនួនខាងក្រោមជាកត្តាបឋម រួចរកសំណុំតួចែករួម:

a) 3570 និង 5455

b) 1331 និង 4913

a) 3570 និង 5455

ដោយ $3570 = 2\times 3\times 5\times 7\times 17$

$5455 = 5\times 1091$

នាំឲ្យ សំណុំតួចែករួមនៃ 3570 និង 5455 គឺ $\{5\}$

b) 1331 និង 4913

ដោយ $1331 = 11^3$

$4913 = 17\times 289$

នាំឲ្យ សំណុំតួចែករួមនៃ 1331 និង 4913 គឺ $\{1\}$

4. កំណត់ GCD និង LCM នៃចំនួន a និង b ខាងក្រោម៖

a) $a=90\ ;\ \mathrm{b}=105$

b) $a=3960\ ;\ \mathrm{b}=819$

c) $a=7020\ ;\ \mathrm{b}=52272$

ដំណោះស្រាយ

a) $a=90\ ;\ \mathrm{b}=105$

ដោយ $a=90=2\times3^2\times5$ និង $b=105=3\times5\times7$

$\Rightarrow\ GCD(a,b)=GCD(90{,}105)=3\times5=15$

និង $LCM(a,b)=LCM(90{,}105)=2\times3^2\times5\times7=630$

b) $a=3960\ ;\ b=819$

ដោយ $a=3960=2^3\times3^2\times5\times11$

$b=819=3^2\times7\times13$

$\Rightarrow\ GCD(a,b)=GCD(3960,819)=3^2=9$

និង $LCM(a,b)=LCM(3960,819)=2^3\times3^2\times5\times7\times11\times13=360360$

c) $a=7020\ ;\ b=522720$

ដោយ $52272=7020\times7+3132$

$\Rightarrow\ GCD(52272,7020)=GCD(7020,3132)$

ម្យ៉ាងទៀត $7020=2^2\times3\times5\times117$

$3132=2^2\times3^3\times29$

$\Rightarrow\ GCD(52272,7020)=GCD(7020,3132)=2^2\mathrm{x}3=12$

$$\Rightarrow\ LCM(7020,52272)=\frac{7020\times52272}{GCD(7020,52272)}=30579120$$

5. កំណត់ GCD និង LCM នៃចំនួន a និង b ខាងក្រោម ដោយប្រើអាល់ការីតអឺគ្លីត៖

a) $a=2600\ ;\ \mathrm{b}=1925$

b) $a=168\ ;\ b=819$

c) $a=3920\ ;\ b=2025$

d) $a=2600\ ;\ b=1540$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ GCD និង LCM នៃចំនួន a និង b ខាងក្រោមដោយប្រើអាល់ការីតអឺគ្លីត៖

a) $a=2600\ ;\ b=1925$

តារាង

	1	2	1	5	1	3	ផលចែក
2600	1925	675	575	100	75	25	
675	575	100	75	25	0		សំណល់
R1	R2	R3					

តាមតារាងគេបាន $GCD(2600,1925)=25$

b) $a=168\ ;\ b=819$

តារាង

	$\frac{1}{2}$	19	2	ផលចែក
168	819	42	21	
42	21	0		សំណល់
R1	R2	R3		

តាមតារាង គេបាន $GCD(168,819)=21$

c) $a=3920\ ;\ b=2025$

តារាង

	1	1	14	1	1	2	1	3	ផលចែក
3920	2025	1895	130	75	55	20	15	5	
1895	130	75	55	20	15	5	0		សំណល់
R1	R2	R3							

តាមតារាង គេបាន $GCD(3920,2025)=5$

d) $a=2600\ ;\ b=1540$

តារាង

	1	1	2	4	1	4	ផលចែក
2600	1540	1060	480	100	80	20	
1060	480	100	80	20	0		សំណល់
R1	R2	R3					

តាមតារាង គេបាន $GCD(2600,1540)=20$

6. រកពីរចំនួនដែលមានផលបូក 72 និង $GCD = 72$ ។

តាង x និង y ជាពីរចំនួនដែលត្រូវរក

$$\begin{cases} x + y = 72 \\ GDC(x; y) = 72 \end{cases}$$

ចំពោះ $GCD(x; y) = 72$

យើងបាន $\exists x'; y' \in IN$ ដែល $x = 72x'$ & $y = 72y'$

$$\Rightarrow x + y = 72 \Leftrightarrow 72x' + 72y' = 72$$

$$\Rightarrow x' + y' = 1$$

តែ $x'; y' \in IN \Rightarrow (x' = 1; y' = 0)$ & $(x' = 0; y' = 1)$

. បើ $(x' = 0; y' = 1) \Rightarrow x = 0; y = 72$

. បើ $(x' = 1; y' = 0) \Rightarrow x = 72; y = 0$

7. រកពីរចំនួនដែលមានផលបូក 150 និង $GCD = 15$ ។

តាង x និង y ជាចំនួនដែលត្រូវរក យើងបាន

$$\begin{cases} x + y = 150 & (1) \\ GCD(x, y) = 15 & (2) \end{cases}$$

តាម (2) : $GCD(x, y) = 15 \Leftrightarrow \exists x'; y' \in IN; x = 15x'; y' = 15y'$

និង $GCD(x', y') = 1$

តាម (1) : $15x' + 15y' = 150 \Rightarrow x' + y' = 10$

យើងបាន $(x' = 1, y' = 9)$ ឬ $(x' = 3, y' = 7)$ ឬ $(x' = 7, y' = 3)$ ឬ $(x' = 9, y' = 1)$

$\Rightarrow (x = 15, y = 135)$ ឬ $(x = 45, y = 105)$ ឬ $(x = 105, y = 45)$ ឬ $(x = 135; y = 15)$

8. កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដដែលតូចជាង 100 ដែល $GCD(n, 252) = 7$ ។

កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

គេមាន $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ ហើយ $GCD(n, 252) = 7$

$\Rightarrow n = 7d$ ដែល d ជាចំនួនបឋមនិង $n < 100$

$$\Rightarrow d = \{1; 5; 7; 11; 13\} \Rightarrow n = \{7; 35; 49; 77; 91\}$$

ដូចនេះ $n = \{7; 35; 49; 77; 91\}$

9. រកពីរចំនួនដែលមានផលគុណ 6750 និង $GCD=15$ ។

តាង $x;y$ ជាចំនួនដែលត្រូវរក យើងបាន

$$\begin{cases} xy=6750 & (1) \\ GCD(x,y)=15 & (2) \end{cases}$$

$(1)\quad : \exists x',y' \in IN^*; x=15x'; y=15y'$ និង $GCG(x',y')=1$

$(2)\quad : (15x')(15y')=6750 \Rightarrow 225x'y'=6750$

$\Rightarrow x'y'=30=1\times 30=2\times 15=3\times 10=5\times 6$

តែ $x';y' \in IN^*$ យើងបាន

x'	1	2	3	5	6	10	15	30
y'	30	15	10	6	5	3	2	1

ដោយ $x=15x'; y=15y'$ យើងបាន

x	15	30	45	75	90	150	225	450
y	450	225	150	90	75	45	30	15

10. រកពីរចំនួនដែលមានផលគុណ 735 និង $LCM=105$ ។

តាង $x;y$ ជាចំនួនដែលត្រូវរក គេបាន

$$\begin{cases} xy=735 & (1) \\ LCM(x,y)=105 & (2) \end{cases}$$

តាម (2): $LCM(x,y)=105$ យើងបាន

$\exists x';y' \in IN^*$ ដែល $105=xx'; 105=yy'$

$$\Rightarrow x=\frac{105}{x'}; y=\frac{105}{y'}$$

តាម(1) : $\dfrac{105}{x'}\times\dfrac{105}{y'}=735 \Rightarrow x'y'=\dfrac{105^2}{735}=15$

$\Rightarrow x'y'=1\times 15=3\times 5=5\times 3=15\times 1$

យើងបាន $(x'=1,y'=15);(x'=3,y'=5);(x'=5,y'=3);(x'=15,y'=1)$

នាំឲ្យគូ (x,y) គឺ $(x=105,y=7);(x=35;y=21);(x=21,y=35);\ (x=7,y=105)$

11. រកពីរចំនួនដែលមានផលបូក 20 និង $LCM=42$ ។

រកពីរចំនួនដែលមានផលបូក 20 និង $LCM=42$

តាង $x;y$ ជាចំនួនដែលត្រូវរក គេបាន

$$\begin{cases} x+y=20 & (1) \\ LCM(x,y)=42 & (2) \end{cases}$$

ដោយ $42=2\times3\times7$

យើងបានតួចែកនៃ 42 គឺ $\{1;2;3;6;7;14;21;42\}$

តាម (1): $x+y=20=0+20=1+19=......=19+1=20+0$

យើងបាន x និង y អាចយកធាតុដែលជាតួចែកនៃ 42 :

$$\Rightarrow x=6; y=14 \text{ និង } x=14; y=6$$

ដូចនេះ ពីរចំនួនដែលត្រូវរកនោះគឺ 6 និង 14

12. ប្រើទ្រឹស្តីបទហ្គោស $(Gauss)$ កំណត់ពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b ដែល៖ a និង b ជាពីរចំនួនបឋម ហើយ $33a-45b=0$ ។

ដោយ $33a-45b=0 \Rightarrow 33a=45b$

ដោយ a និង b ជាពីរចំនួនបឋម

តាង $a=45k\ ; k\in IN^*$

នោះគេបាន (1): $33\times45k=45b \Rightarrow b=33k$

ដូច្នេះ $a=45k; b=33k\ \ ; k\in IN^*$

13.ប្រើទ្រឹស្តីបទហ្គោស $(Guass)$ កំនត់ពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b ដែល៖ $GCD(a,b)=21$ និង $99a-1665b=0$ ។

កំណត់ពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b

យើងមាន $GCD(a,b)=21 \Rightarrow \exists a',b'\in IN$

ដែល $a=21a'; b=21b'$

យើងបាន $99a-1665b=0 \Rightarrow 99\times21a'-1665\times21b'=0$

$$\Rightarrow 99a'-1665b'=0 \Rightarrow 11a'-185b'=0$$

$$\Rightarrow 11a'=185b'$$

ដោយ $\begin{cases} GCD(a',b')=1 \\ GCD(11,185)=1 \end{cases} \Rightarrow a'=185; b'=11$

យើងបាន $a=21\times185=3885; b=21\times11=231$

ដូច្នេះ $a=3885; b=231$

ដំណោះស្រាយលំហាត់ជំពូក

1. គេឲ្យ $m=93145751$ និង $n=84175277$

ក. កំនត់សំណល់នៃវិធីចែកនឹង 43 នៃ m និង n ។

ខ. ទាញរកសំណល់ $m+n\,;mn;m^3;n^4$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដោយ $m=93145751$ និង $n=84175277$ យើងបាន :

$$m=43\times 2166180+11;n=43\times 1957564+25$$

យើងបានសំណល់នៃវិធីចែកនឹង 43 នៃ m និង n គឺ 11 និង 25 រៀងគ្នា

ខ. ដោយ $m=43\times q_1+11;n=43\times q_2+25$

យើងបាន $:m+n=43q_1+11+43q_2+25=43(q_1+q_2)+36$

មានសំណល់ស្មើនឹង 36 ។

- $mn=(43q_1+11)(43q_2+25)=43^2q_1q_2+43q_1\times 25+43q_2\times 11+275$

$$=43(43q_1q_2+25q_1+11q_2+6)+17$$

$=43q_3+17$ ដែល $q_3=43q_1q_2+25q_1+11q_2+11$ មានសំណល់ស្មើនឹង 17

- $m^3=(43q_1+11)^3=(43q_1)^3+3(43q_1)^2\times 11+3\times 43q_1\times 11^2+11^3$

$$=43(43^2q_1^{\,3}+1419q_1^{\,2}+363q_1)+43\times 30+14$$

$$=43(43^2q_1^{\,3}+141q_1^{\,2}+363q_1+30)+41$$

មានសំណល់ស្មើនឹង 41

- $n^4=(43q_2+25)^4$

$$=(43q_2)^4+4(43q_2)^3\times 25+6\times\left(43q_2\right)^2\times 25^2+4(43q_2)\times 25^3+25^4$$

$$=43(43^3q_2^{\,4}+100\times 43^2q_2^{\,3}+6\times 43\times 25^2q^2+4\times 25^3q_2+9084)+13$$

សំណល់ស្មើនឹង13

2.កំណត់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $(x; y)$ ជាចំលើយនៃសមីការខាងក្រោម:

ក. $xy = -6$

ខ. $x^2 - y^2 = 15$

គ. $x^2 y + xy^2 = 12$

ឃ. $4x^2 - y^2 = 20$

ង. $(2x-3)(3y+1) = -2$

ច. $(x-2)(y+3) = 14$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $(x; y)$ ជាចំលើយនៃសមីការខាងក្រោម:

ក. យើងមាន $xy = -6$

ដោយ $x; y \in Z$ យើងបាន:

$$xy = -6 = 1\times(-6) = 2\times(-3) = 3\times(-2) = 6\times(\times(-1)$$

$$\Rightarrow (x=1; y=-6); (x=-1; y=6); (x=2; y=-3); (x=-1; y=2)$$

ខ. $x^2 - y^2 = 15 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 15$

$$\Rightarrow (x-y)(x+y) = (-1)\times(-15) = (-3)\times(-5)$$

$$= 1\times 15 = 3\times 5$$

ដោយ $x; y \in Z$ យើងបាន:

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-15 \end{cases}; \begin{cases} x-y=-15 \\ x+y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x-y=-3 \\ x+y=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=-5 \\ x+y=-3 \end{cases}; \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=15 \end{cases}; \begin{cases} x-y=15 \\ x+y=1 \end{cases}; \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=5 \end{cases}; \begin{cases} x-y=5 \\ x+y=3 \end{cases}$$

- ចំពោះ $\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-8 \\ y=-7 \end{cases}$

- ចំពោះ $\begin{cases} x-y=-15 \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-8 \\ y=7 \end{cases}$

- ចំពោះ $\begin{cases} x-y=-3 \\ x+y=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$

- ចំពោះ $\begin{cases} x-y=-5 \\ x+y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$

- ចំពោះ $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=7 \end{cases}$

- ចំពោះ $\begin{cases} x-y=15 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=-7 \end{cases}$

- ចំពោះ $\begin{cases} x-y=3 \\ x=y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

- ចំពោះ $\begin{cases} x-y=5 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$

ដូចនេះ គូចម្លើយគឺ: $\{(-8;\pm 7);(-4;\pm 1);(8;\pm 7);(4;\pm 1)\}$

គ. $x^2y+xy^2=12 \Rightarrow xy(x+y)=12$

$\Rightarrow xy(x+y)=(-1)(-12)=(-2)(-6)=(-3)(-4)$

$=1\times 12=2\times 6=3\times 4$

ដោយ $x;y\in Z$ និងប្រមាណវិធីគុណមានលក្ខណៈត្រលប់ យើងបានៈ

$\begin{cases} xy=-1 \\ x+y=-12 \end{cases};\begin{cases} xy=-12 \\ x+y=-1 \end{cases};\begin{cases} xy=-2 \\ x+y=-6 \end{cases};\begin{cases} xy=-6 \\ x+y=-2 \end{cases};\begin{cases} xy=-3 \\ x+y=-4 \end{cases};\begin{cases} xy=-4 \\ x+y=-3 \end{cases};\begin{cases} xy=1 \\ x+y=12 \end{cases};$

$\begin{cases} xy=12 \\ x+y=1 \end{cases};\begin{cases} xy=3 \\ x+y=4 \end{cases};\begin{cases} xy=4 \\ x+y=3 \end{cases};\begin{cases} xy=2 \\ x+y=6 \end{cases};\begin{cases} xy=6 \\ x+y=2 \end{cases}$

- ចំពោះ $\begin{cases} xy=-1 \\ x+y=-12 \end{cases}$ យើងបាន x និង y ជាឫសរបស់សមីការ $t^2+12t-1=0$

មាន $\Delta'=36+1=37 \Rightarrow t=-6\pm\sqrt{37}$ មិនយក

- ចំពោះ $\begin{cases} xy=-12 \\ x+y=-1 \end{cases}$ យើងបាន x និង y ជាឫសរបស់សមីការ $t^2+t-12=0$ មាន

$$\Delta=1+48=49=7^2 \Rightarrow t=\begin{cases} \frac{-1-7}{2}=-4 \\ \frac{-1+7}{2}=3 \end{cases} \Rightarrow (x=-4;y=3);(x=3;y=-4)$$

- ចំពោះ $\begin{cases} xy=-2 \\ x+y=-6 \end{cases}$ យើងបាន x និង y ជាឫសរបស់សមីការ $t^2+6t-2=0$ មាន

$\Delta'=9+2=11 \Rightarrow t=-3\pm\sqrt{11}$ មិនយក

- ចំពោះ $\begin{cases} xy=-6 \\ x+y=-2 \end{cases}$ យើងបាន x និង y ជាឫសរបស់សមីការ $t^2+2t-6=0$ មាន

$\Delta'=1+6=7 \Rightarrow -1\pm\sqrt{7}$ មិនយក

- ចំពោះ $\begin{cases} xy=-3 \\ x+y=-4 \end{cases}$ យើងបាន x និង y ជាឫសរបស់សមីការ $t^2+4t-3=0$ មាន

$\Delta' = 4+3=7 \Rightarrow t=-2\pm\sqrt{7}$ មិនយក

- ចំពោះ $\begin{cases} xy=-4 \\ x+y=-3 \end{cases}$ យើងបាន x និង y ជាឫសរបស់សមីការ $t^2+3t-4=0$

$\Rightarrow t=1; t=-4$ យើងបាន: $(x=1; y=-4); (x=-4; y=1)$

- ចំពោះ $\begin{cases} xy=1 \\ x+y=12 \end{cases}$ យើងបាន x និង y ជាឫសរបស់សមីការ $t^2-12t+1=0$ មាន

$\Delta' = 36+1=37 \Rightarrow t=-6\pm\sqrt{37}$ មិនយក

- ចំពោះ $\begin{cases} xy=12 \\ x+y=1 \end{cases}$ យើងបាន x និង y ជាឫសរបស់សមីការ $t^2-t+12=0$ មាន

$\Delta = 1-48=-47<0$ សមីការគ្មានឫស

- ចំពោះ $\begin{cases} xy=3 \\ x+y=4 \end{cases}$ យើងបាន x និង y ជាឫសរបស់សមីការ $t^2-4t+3=0$

$\Rightarrow t=1; t=3$ យើងបាន: $(x=1; y=3); (x=3; y=1)$

- ចំពោះ $\begin{cases} xy=4 \\ x+y=3 \end{cases}$ យើងបាន x និង y ជាឫសរបស់សមីការ $t^2-3t+4=0$ មាន

$\Delta = 9-16=-7<0$ សមីការគ្មានឫស

- ចំពោះ $\begin{cases} xy=2 \\ x+y=6 \end{cases}$ យើងបាន x និង y ជាឫសរបស់សមីការ $t^2-6t+2=0$ មាន

$\Delta' = 9-2=7 \Rightarrow t=3\pm\sqrt{7}$ មិនយក

- ចំពោះ $\begin{cases} xy=6 \\ x+y=2 \end{cases}$ យើងបាន x និង y ជាឫសរបស់សមីការ $t^2-2t+6=0$ មាន

$\Delta' = 1-6=-5<0$ សមីការគ្មានឫស

ដូចនេះ $(x;y)=\{(-4;3);(3;-4);(1;-4);(-4;1);(-4;1);(1;3);(3;1)\}$ ។

ឃ. $4x^2-y^2=20 \Rightarrow (2x-y)(2x+y)=20$

$$\Rightarrow (2x-y)(2x+y)=1\times 20=2\times 10=4\times 5=(-1)(-20)$$
$$=(-2)(-10)=(-4)(-5)$$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ:

$\begin{cases}2x+y=1\\2x-y=20\end{cases};\begin{cases}2x+y=20\\2x-y=1\end{cases};\begin{cases}2x+y=2\\2x-y=10\end{cases};\begin{cases}2x+y=10\\2x-y=2\end{cases};\begin{cases}2x+y=4\\2x-y=5\end{cases};\begin{cases}2x+y=5\\2x-y=4\end{cases};$

$\begin{cases}2x+y=-1\\2x-y=-20\end{cases};\begin{cases}2x+y=-20\\2x-y=-1\end{cases};\begin{cases}2x+y=-2\\2x-y=-10\end{cases};\begin{cases}2x+y=-10\\2x-y=-2\end{cases};\begin{cases}2x+y=-4\\2x-y=-5\end{cases};\begin{cases}2x+y=-5\\2x-y=-4\end{cases}$

ក្រោយពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ យើងបាន:

$(x;y)=\{(3;\pm 4);(-3;\pm 4)\}$ ។

ង. $(2x-3)(3y+1)=-2$ យើងបាន:

$(2x-3)(3y+1)=(-1)(2)=(1)(-2)$

$\Rightarrow\begin{cases}2x-3=-1\\3y+1=2\end{cases};\begin{cases}2x-3=-2\\3y+1=1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}2x=2\\3y=1\end{cases};\begin{cases}2x=1\\3y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=\frac{1}{3}\end{cases};\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=0\end{cases}$ មិនយក

ច. $(x-2)(y+3)=14$ យើងបាន:

$(x-2)(y+3)=1\times 4=2\times 7=(-1)(-14)=(-2)(-7)$ ដែល $x;y\in Z$ យើងបាន:

$\Rightarrow\begin{cases}x-2=1\\y+3=14\end{cases};\begin{cases}x-2=14\\y+3=1\end{cases};\begin{cases}x-2=2\\y+3=7\end{cases};\begin{cases}x-2=7\\y+32\end{cases};$

$\begin{cases}x-2=-1\\y+3=-14\end{cases};\begin{cases}x-2=-14\\y+3=-1\end{cases};\begin{cases}x-2=-2\\y+3=-7\end{cases};\begin{cases}x-2=-7\\y+3=-2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=11\end{cases};\begin{cases}x=16\\y=-2\end{cases};\begin{cases}x=4\\y=4\end{cases};\begin{cases}x=9\\y=-1\end{cases};\begin{cases}x=1\\y=-17\end{cases};\begin{cases}x=-12\\y=-4\end{cases};\begin{cases}x=0\\y=-10\end{cases};\begin{cases}x=-5\\y=-5\end{cases}$

3. បង្ហាញថា $13^{1985}+13^{1986}+...+13^{1992}$ ចែកដាច់នឹង 170 ។

$$\begin{aligned}13^{1985}+13^{1986}+...+13^{1992}&=13^{1985}(1+13+13^2+...+13^7)\\&=13^{1985}\times\frac{13^8-1}{13-1}\\&=399868\times 170\times 13^{1985}\end{aligned}$$

ចែកដាច់នឹង 170 ។

4. បង្ហាញថា n^5-n ចែកដាច់នឹង 5 ។

ដោយ $N=n^5-n=n(n^2-1)(n^2+1)=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

យើងត្រូវស្រាយថា N ចែកដាច់នឹង 5 និង 6

- ករណី $n=5k \Rightarrow N=5k(5k-1)(5k+1)\left[(5k)^2+1\right]$ ចែកដាច់នឹង 5

- ករណី $n=5k+1 \Rightarrow N=(5k+1)(5k)(5k+2)\left[(5k+1)^2+1\right]$ ចែកដាច់នឹង 5

- ករណី $n=5k+2 \Rightarrow N=(5k+2)(5k+1)(5k+3)\left[(5k+2)^2+1\right]$

$$=(5k+1)(5k+2)(5k+3)(25k^2+20k+5)$$
$$=5(5k+1)(5k+2)(5k+3)(5k^2+4k+1)$$

ចែកដាច់នឹង 5

- ករណី $n=5k+3 \Rightarrow N=(5k+3)(5k+2)(5k+4)\left[(5k+3)^2+1\right]$

$$=(5k+2)(5k+3)(5k+4)(25k^2+30k+10)$$
$$=5(5k+2)(5k+3)(5k+4)(5k^2+6k+2)$$

ចែកដាច់នឹង 5

- ករណី $n=5k+4 \Rightarrow N=(5k+4)(5k+3)(5k+5)\left[(5k+1)^2+1\right]$

$$=(5k+3)(5k+4)(k+1)\left[(5k+4)^2+1\right]$$

ចែកដាច់នឹង 5

5. គ្រប់ n ចំនួនគត់ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $n(n^2-1)$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

គេមាន $n(n^2-1)=n(n+1)(n-1)$ ចែកដាច់នឹង 3

(មានស្រាយនៅលំហាត់ទី២ មេរៀនទី១)

6. គ្រប់ n ចំនួនគត់ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $n(n^6-1)$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

តាង $N=n(n^6-1)=n(n^3-1)(n^3+1)=n(n-1)(n^2+n+1)(n^3+1)$

$\forall n$ ជាចំនួនគត់ នោះ n អាចសរសេរក្រោមទំរង់ $7k; 7k+1; 7k+2; 7k+3$ ដែល $k\in\mathbb{N}^*$ ។

- បើ $n=7k \Rightarrow N$ ជាពហុគុណនៃ 7

- បើ $n=7k+1 \Rightarrow n-1$ ជាពហុគុណនៃ 7 នោះ N ជាពហុគុណនៃ 7

- បើ $n=7k-1 \Rightarrow n^3+1$ ជាពហុគុណនៃ 7 នោះ N ជាពហុគុណនៃ 7

- បើ $n=7k+2 \Rightarrow n^2+n+1$ ជាពហុគុណនៃ 7 នោះ N ជាពហុគុណនៃ 7

- បើ $n=7k-2 \Rightarrow n^3+1$ ជាពហុគុណនៃ 7 នោះ N ជាពហុគុណនៃ 7
- បើ $n=7k+3 \Rightarrow n^3+1$ ជាពហុគុណនៃ 7 នោះ N ជាពហុគុណនៃ 7
- បើ $n=7k-3 \Rightarrow n^2+n+1$ ជាពហុគុណនៃ 7 នោះ N ជាពហុគុណនៃ 7

សរុបមក $\forall n\in\mathbb{N}^*$ យើងបាន $n(n^6-1)$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

7. គ្រប់ n ចំនួនគត់ ស្រាយបញ្ជាក់ថា 4^n+6n-1 ចែកដាច់នឹង 9 ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា 4^n+6n-1 ចែកដាច់នឹង 9

ស្រាយតាមវិចារកំណើនគណិតវិទ្យា:

- បើ $n=0$ នោះ $4^0+6\times1-1=0$ ចែកដាច់នឹង 9
- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គឺ 4^k+6k-1 ចែកដាច់នឹង 9
- យើងនឹងស្រាយថាវាពិតរហូតដល់ $n=k+1$ យើងបាន:

$$\begin{aligned}
&4^{k+1}+6(k+1)=4\times4^k+6k+5\\
&=4(4^k+6k-1)-18k+9\\
&=4(4^k+6k-1)-9(2k-1)
\end{aligned}$$

ដោយ 4^k+6k-1 ចែកដាច់នឹង 9 និង $9(2k-1)$ ចែកដាច់នឹង

$\Rightarrow 4^{k+1}+6(k+1)$ ចែកដាច់នឹង 9

ដូចនេះ 4^n+6n-1 ចែកដាច់នឹង 9 ។

8. គ្រប់ n ចំនួនគត់ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(a+1)^{n+1}-a(n+1)-1$ ចែកដាច់នឹង a^2 ។

តាមរូបមន្តទ្វេធាតុញូតុន យើងបាន :

$$\begin{aligned}
(a+1)^{n+1}&=a^{n+1}+C_{n+1}^1a^n+C_{n+1}^2a^{n-1}+\dots+C_{n+1}^na+1\\
&=a^{n+1}+C_{n+1}^1a^n+C_{n+1}^2a^{n-1}+\dots+C_{n+1}^{n-2}a^2+C_{n+1}^{n-1}a+1\\
\Rightarrow (a+1)^{n+1}-a(n+1)-1&=a^{n+1}+C_{n+1}^1a^n+C_{n+1}^2a^{n-1}+\dots+C_{n+1}^{n-2}a^2+C_{n+1}^{n-1}a\\
&=a^2(a^{n-1}+C_{n+1}^1a^{n-2}+C_{n+1}^2a^{n-3}+\dots+C_{n+1}^{n-1})
\end{aligned}$$

យើងបាន $(a+1)^{n+1}-a(n+1)-1$ ចែកដាច់នឹង a^2

ដូចនេះ $(a+1)^{n+1}-a(n+1)-1$ ចែកដាច់នឹង a^2 ។

9. គ្រប់ a និង b ជាចំនួនគត់ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $ab(a^2-b^2)$ ចែកដាច់និង 3 ។

$$N = ab(a^2-b^2) = ab(a^2-1-b^2+1)$$
$$= ab\left[(a^2-1)-(b^2-1)\right]$$
$$= ba(a-1)(a+1)-ab(b-1)(b+1)$$

យើងបាន: $ba(a-1)(a+1)$ និង $ab(b-1)(b+1)$ ចែកដាច់នឹង 3

ព្រោះ $\forall a \in \mathbb{N}$ គេបាន:

- បើ $a=3k \Rightarrow a(a-1)(a+1)=3k(3k-1)(3k+1)$ ចែកដាច់នឹង 3
- បើ $a=3k+1 \Rightarrow a(a-1)(a+1)=(3k+1)(3k)(3k+2)$ ចែកដាច់នឹង 3
- បើ $a=3k+2 \Rightarrow a(a-1)(a+1)=3(3k+2)(3k+1)(k+1)$ ចែកដាច់នឹង 3

ដូចគ្នាដែរចំពោះ $ab(b-1)(b+1)$ ចែកដាច់នឹង 3

នោះ $ba(a-1)(a+1)-ab(b-1)(b+1)$ ចែកដាច់នឹង 3

ដូចនេះ $ab(a^2-b^2)$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

10. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $34^{57}-1$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

$$34^{57}-1=(34-1)(34^{56}+34^{55}+\dots+34+1)$$
$$=33(34^{56}-34^{55}+\dots+34+1)$$
$$=3\times 11(34^{56}+34^{55}+\dots+34+1)$$

ចែកដាច់នឹង 11

ដូចនេះ $34^{57}-1$ ចែកដាច់នឹង 11

11. គ្រប់ n ជាចំនួនគត់ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $n^{4n+1}-(n+1)4^n+1$ ចែកដាច់នឹង 3

តាង $f(n)=n^{4n+1}-(n+1)4^n+1$
$$=n^{4n+1}-n4^n-4^n+1$$
$$=n(n^{4n}-4^n)-(4^n-1)$$

ដោយ $4\equiv 3.1+1$ ឬ $4\equiv 1(\bmod 3)$

$$\Rightarrow 4^n \equiv 1^n(\bmod 3) \Rightarrow 4^n\equiv 1(\bmod 3)$$

តែ $1 \equiv 1 (\bmod 3) \Rightarrow 4^n \equiv 1 (\bmod 3)$ ចែកដាច់នឹង 3 (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\forall n \in IN$ ពេលចែកដាច់នឹង 3 មានសំណល់ 0 ឬ 1 ឬ 2

យើងបានន $n \vdots 0 (\bmod 3)$ ឬ $n \vdots 1 (\bmod 3)$ ឬ $n \vdots 2 (\bmod 3)$

- ករណី $n \vdots 0 (\bmod 3)$

  $\Rightarrow n(n^{4n} - 4^n \vdots 0 (\bmod 3) \Rightarrow n(n^{4n} - 4^n)$ ចែកដាច់នឹង 3

- ករណី $n \vdots 1 (\bmod 3)$

  ដោយ $n^{4n} \vdots 1^{4n} (\bmod 3) \Rightarrow n^{4n} \vdots 1 (\bmod 3)$

  តែ $4^n \vdots 1 (\bmod 3)$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

  $\Rightarrow n^{4n} - 4^n \vdots 0 (\bmod 3) \Rightarrow n(n^{4n} - 4^n) \vdots 0 (\bmod 3)$

  នោះ $n(n^{4n} - 4^{n)}$ ចែកដាច់នឹង 3

- ករណី $n \vdots 2 (\bmod 3)$

  ដោយ $n^{4n} \vdots (-1)^{4n} (\bmod 3) \Rightarrow n^{4n} \vdots 1 (\bmod 3)$ ព្រោះ $4n$ គូ

  និង $4^n \vdots 1 (\bmod 3) \Rightarrow n^{4n} - 4^n \vdots 0 (\bmod 3)$

  $\Rightarrow n(n^{4n} - 4^n) \vdots 0 (\bmod 3) \Rightarrow n(n^{4n} - 4^n)$ ចែកដាច់នឹង 3

សរុបមក $\forall n \in IN^*$ យើងបាន $n(n^{4n} - 4^n)$ ចែកដាច់នឹង 3 (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន $f(n)$ ចែកដាច់នឹង 3

ដូចនេះ $\forall n \in IN^* ; n^{4n+1} - (n+1)4^n + 1$ ចែកដាច់នឹង 3

12. គ្រប់ n ជាចំនួនគត់ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

តាង $f(n) = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

ស្រាយតាមវិចារកំនើនគណិតវិទ្យា៖

បើ $n = 1 \Rightarrow f(1) = 3^3 + 2^3 = 27 + 8 = 35$ ចែកដាច់នឹង 7

ឧបមាថាវាពិតរហូតដល់ n គឺ $f(n)$ ចែកដាច់នឹង 7

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតរហូតដល់ $n+1$ គឺ $f(n+1)$ ចែកដាច់នឹង 7

យើងបាន $f(n+1) = 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^{2n+3} + 2^{n+3}$

$= 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} = 7 \times 3^{2n+1} + 2 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2}$

$= 7 \times 3^{2n+1} + 2f(n)$

ដោយ $7\times 3^{2n+1}$ ចែកដាច់នឹង 7 និង $f(n)$ ចែកដាច់នឹង 7

យើងបាន $f(n+1)$ ចែកដាច់នឹង 7

ដូចនេះ $\forall n\in IN^*; 3^{2n+1}+2^{n+2}$ ចែកដាច់នឹង 7

13.បង្ហាញថា ចំពោះ $k\in\{2;3;4;5\}$ នោះ $5!+k$ មិនមែនជាចំនួនបឋម។

- បើ $k=2\Rightarrow 5!+2=120+2=122=2\times 61$ មិនមែនជាចំនួនបឋម
- បើ $k=3\Rightarrow 5!+3=120+3=123=3\times 41$ មិនមែនជាចំនួនបឋម
- បើ $k=4\Rightarrow 5!+4=120+4=124=2\times 62$ មិនមែនជាចំនួនបឋម
- បើ $k=5\Rightarrow 5!+5=120+5=125=5\times 25$ មិនមែនជាចំនួនបឋម

ដូចនេះ $k\in\{2;3;4;5\}$ នោះ $5!+k$ មិនមែនជាចំនួនបឋម

14. តាង p ជាចំនួនបឋមហើយ f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយៈ

$$f(x)=\frac{2x^2+p}{x}$$

a. រក $f(1)$ និង $f(p)$

b. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ផ្សេងពី 1 និង p គេបាន $f(n)\notin IN$

a. រក $f(1)$ និង $f(p)$

$$f(1)=\frac{2\times 1+p}{1}=2\times p$$

$$f(p)=\frac{2p^2+p}{p}=2p+1$$

b. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ផ្សេងពី 1 និង p គេបាន $f(n)\notin IN$

គេបាន $f(n)=\dfrac{2n^2+p}{n}; n\in IN$

$\Rightarrow f(n)=2n+\dfrac{p}{n}$ ដែល p បឋម

- បើ n បឋម $\Rightarrow \dfrac{p}{n}\notin IN\Rightarrow 2n+\dfrac{p}{n}\notin IN$ ឬ $f(n)\notin IN$
- បើ n បឋម នោះ $\exists b\in IN$ និង b បឋម ដែល $b|n$ និង $b^2\le n$

$\Rightarrow n=bq; q\in IN\Rightarrow \dfrac{p}{n}=\dfrac{p}{bq}=\dfrac{1}{q}\times\dfrac{p}{b}\in IN$ ព្រោះ $\dfrac{1}{q}\in IN$

$\Rightarrow 2n+\dfrac{p}{n}\notin IN$ ឬ $f(n)\notin IN$

សរុបមក $\boxed{\forall n\in IN; f(n)\notin IN}$

15. រកតម្លៃអប្បរមានៃ k ដែលធ្វើឱ្យ $60k$ ជាការេប្រាកដ។

16. ប្រើទ្រឹស្តីបទហ្គោស $(Gauss)$ កំណត់ពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b ដែល $\frac{a}{b}$ ជាប្រភាគមិនអាចសម្រួលបាននិង $\frac{a+21}{b+15}=\frac{a}{b}$

គេមាន $\frac{a+21}{b+15}=\frac{a}{b}\Rightarrow b(a+21)=a(b+15)$

$\Rightarrow ab+21b=ab+15a\Rightarrow 21b=15a\Rightarrow 7b=5a$

ដោយ $\frac{a}{b}$ ជាប្រភាគសំរួលមិនបាន $\Rightarrow GCD\left(a,b\right)=1$ និង $GCD(7,5)=1$

យើងបាន $a=7k;b=5k;k\in IN^{*}$

17. កំណត់គូចម្លើយចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបនៃសមីការខាងក្រោម៖

a. $5x+16y=1$

b. $44x-40y=4$

c. $44x-20y=4$

កំណត់គូចម្លើយចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបនៃសមីការខាងក្រោម៖

a. $5x+16y=1$

ដោយធ្វើវិធីចែក 16 និង 5 យើងបាន

$16=5\times 3+1\Rightarrow 5(-3)+16=1$

$$\Rightarrow\begin{cases}5x+16y=1\\ 5(-3)+16=1\end{cases}$$

$5(x-3)=16(1-y)\qquad(1)$

ដោយ 5 និង 10 បឋមរវាងគ្នា៖

តាង $x+3=16k;k\in Z$ យើងបាន $x=16k-3$

តាម $(1):5\times 16k=16(1-y)\Rightarrow y=1-5k$

ដូចនេះ $\boxed{x=16k-3;y=1-5k;k\in Z}$

b. $44x-40y=4 \Rightarrow 11x-10y=1$

យើងបាន:

$$\begin{cases} 11x-10y=1 \\ 11\times1-10\times1=1 \end{cases}$$

$11(x-1)-10(y-1)=0 \Rightarrow 11(x-1)=10(y-1)$

ដោយ $GCD(11,10)=1$ យើងបាន $x-1=10k$ និង $y-1=11k$

យើងបាន $x=10k+1$ និង $y=11k+1$ ដែល $k\in Z$

ដូចនេះ $\boxed{x=10k+1; y=11k+1; k\in Z}$

c. $44x-20y=4 \Rightarrow 11x-5y=1$

យើងបាន:

$$-\begin{cases} 11x-5y=1 \\ 11\times1-5\times2=1 \end{cases}$$

$11(x-1)-5(y-2)=0 \Rightarrow 11(x-1)=5(y-2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=5k \\ y-2=11k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5k+1 \\ y=11k+2 \end{cases}; k\in Z$$

ដូចនេះ $\boxed{x=5k+1; y=11k+2; k\in Z}$

18. រកសំណុំតួចែករួមនៃពីរចំនួន a និង b ដែលឲ្យខាងក្រោម: រួចបញ្ជាក់តួចែករួមធំបំផុត a និង b :

ក. $a=171; b=99$ ខ. $a=924; b=336$

គ. $a=345; b=285$ ឃ. $a=208; b=308$

រកសំណុំតួចែករួមនៃពីរចំនួន a និង b ដែលឲ្យខាងក្រោម រួចបញ្ជាក់តួចែករួមធំបំផុត a និង b :

ក. $a=171; b=99$

ដោយ $171=99\times1+72$

គេបាន តួចែករួមនៃ 171 និង 99 ជាតួចែករួមនៃ 72 និង 99

ដោយ $72=2^3\times3^2$ និង $99=3^2\times11$ យើងបាន:

សំណុំតួចែករួមនៃ 171 និង 99 គឺ $\{1;3;3^2\}$ និង $GCD(171,99)=9$

ខ. $a=924; b=336$

ដោយ $924=2\times 336+252$

តួចែករួមនៃ 924 និង 336 គឺតួចែករួមនៃ 252 និង 336

ដោយ $252=2^2\times 3^2\times 7$ និង $336=2^4\times 3\times 7$

សំណុំតួចែករួមនៃ 924 និង 336 គឺ $\{1;2;3;4;7;21;28;84\}$ និង $GCD(924,336)=84$

គ. $a=345; b=285$

ដោយ $345=3\times 5\times 23$ និង $285=3\times 5\times 19$

សំណុំតួចែករួមនៃ 345 និង 285 គឺ $\{1;3;5;15\}$ និង $GCD(345;285)=15$

ឃ. $a=208; b=308$

ដោយ $208=2^4\times 13$ និង $308=2^2\times 7\times 11$

សំណុំតួចែករួមនៃ 208 និង 308 គឺ $\{1;2;4\}$ និង $GCD(208;308)=4$

19. រកគ្រប់គូ $(a;b)$ នៃចំនួនគត់ធម្មជាតិដែល $a+b=360$ និង $GCD(a,b)=18$ ។

ដោយ $GCD(a,b)=18$ នាំឲ្យ $\exists a';b'\in IN^*$ ដែល $a=18a';b=18b'$ និង $GCD(a',b')=1$

$a+b=360\Rightarrow 18a'+18b'=360\Rightarrow a'+b'=20$

យើងបាន $a'+b'=1+19=3+17=7+13=9+11$

គេបាន $(a'=1;b'=19);(a'=19;b'=1);(a'=3;b'=17);(a'=17;b'=3);$

$(a'=7;b'=13);(a'=13;b'=7);(a'=9;b'=11);(a'=11;b'=9)$

$\Rightarrow (a=18;b=342);(a=342;b=18);(a=54;b=306);(a=306;b=54);$

$(a=126;b=234);(a=234;b=126);(a=162;b=198);(a=198;b=162)$

20. រកគ្រប់គូ (a,b) នៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែល $a+b=960$ និង $GCD(a,b)=40$ ។

$GCD(a;b)=40\Rightarrow \exists a',b'\in IN^*$ ដែល $a=40a'$ និង $b=40b'$

ដោយ $a+b=960\Rightarrow 40a'+40b'=960\Rightarrow a'+b'=24$

យើងបាន $a'+b'=1+23=5+19=7+17=11+13$

$\begin{cases} a'=17 \\ b'=7 \end{cases};\begin{cases} a'=13 \\ b'=13 \end{cases};\begin{cases} a'=13 \\ b'=11 \end{cases}$

យើងបាន គូ(a,b)គឺ(40,920), (920,40), (200,760), (760,200), (280,680), (680,280), (440,220), (220,440)

21.រកគ្រប់គូ(a,b)នៃចំនួនគត់ជាតិ ដែល $a+b=15$ និង $LCM(a,b)=56$ ។

ដោយតួចែកនៃ 56 មាន $1;2;4;7;8;14;28;56$

គេមាន $a+b=15=1+14=2+13=3+12=...=7+8$

និង $56=2^3\times 7$ និង $a;b\in IN$ យើងជ្រើសរើសយក $a;b$ ដែលជាតួចែកនៃ 56 ព្រោះ

$LCM(a;b)=56$

យើងបាន $(a=1;b=14);(a=7;b=8);(a=8;b=7);(a=14;b=1)$

– ចំពោះ $(a=1;b=14)\Rightarrow LCM(a,b)=14$ មិនយក

– ចំពោះ $(a=7;b=8)\Rightarrow LCM(a,b)=56$ ពិត

– ចំពោះ $(a=8;b=7)\Rightarrow LCM(a,b)=56$ ពិត

– ចំពោះ $(a=14;b=1)\Rightarrow LCM(a,b)=14$ មិនយក

ដូចនេះ $\boxed{(a=7;b=8);(a=8;b=7)}$

22. រកគ្រប់ (a,b) នៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែល $GCD(a,b)=6$ និង $LCM(a,b)=36$ ។

$GCD(a,b)=6\Rightarrow \exists a',b'\in IN^*$ ដែល $a=6a';b=6b'$

និង $GCD(a',b')=1$

ដោយ $LCM(a,b)=\dfrac{ab}{GCD(a,b)}$ យើងបាន:

$36=\dfrac{(6a')(6b')}{6}\Rightarrow a'b'=6=1\times 6=2\times 3$ យើងបាន:

$(a'=1;b'=6);(a'=6;b'=1);(a'=3;b'=2);(a'=2;b'=3)$

នាំឲ្យគូ (a,b) គឺ $(6,36);(36,6);(12,18);(18,12)$

23. រកគ្រប់ $(a.b)$ នៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែល $LCM(a,b)=126$

និង $GCD(a,b)=21$ ។

$GCD(a,b)=21 \Rightarrow \exists a',b' \in IN^*$ ដែល:

$a=21a';b=21b'$ និង $GCD(a',b')=1$

ដោយ $LCM(a,b)=\dfrac{ab}{GCD(a,b)}$ យើងបាន:

$126=\dfrac{(21a')(21b')}{21} \Rightarrow a'b'=1\times 6=2\times 3$ យើងបាន:

$(a'=1;b'=6);(a'=6;b'=1);(a'=3;b'2);(a'=2;b'=3)$

នាំឲ្យគូ (a,b) គឺ $(21,126);(126,21);(42,63);(63,42)$