មេរៀនទី១: លីមីតនៃអនុគមន៍

ដំណោះស្រាយលំហាត់

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា លីមីតខាងក្រោមពិតដោយប្រើនិយមន័យ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 3}(5x-2)=13$

ខ. $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{(x-2)(x-3)}=0$

គ. $\lim\limits_{x\to x_0}(ax+b)=ax_0+b$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim\limits_{x\to 3}(5x-2)=13$

តាមនិយមន័យ ចំពោះ $\forall\varepsilon>0$ និង $\exists\delta>0$, យើងបាន:

$|f(x)-L|<\varepsilon$ សមមូល $|(5x-2)-13|<\varepsilon$

សមមូល $|5x-2-13|<\varepsilon$

សមមូល $|5x-15|<\varepsilon$

សមមូល $|5(x-3)|<\varepsilon$

សមមូល $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{5}=\delta$

ដោយ $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}>0$ ដែល $|x-3|<\delta$ នាំអោយ $|f(x)-L|<\varepsilon$ រឺ $|(5x-2)-13|<\varepsilon$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 3}(5x-2)=13}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{(x-2)(x-3)}=0$

តាមនិយមន័យ ចំពោះ $\forall\varepsilon>0$ និង $\exists\delta>0$, យើងបាន:

$|f(x)-L|<\varepsilon$ សមមូល $\left|\sqrt{(x-2)(x-3)}\right|<\varepsilon$

សមមូល $|(x-2)(x-3)|<\varepsilon^2$

សមមូល $|x-2||x-3|<\varepsilon^2$

តែ $x\to 2^-$ នាំអោយ $0<x<2$

នាំអោយ $|x-3|<3$

នាំអោយ $|x-2||x-3|<3|x-2|$

ដើម្បីបាន $\left|\sqrt{(x-2)(x-3)}\right|<\varepsilon$ រឺ $|x-2||x-3|<\varepsilon^2$

គេគ្រាន់តែយក $3|x-2|<\varepsilon^2$ សមមូល $|x-2|<\dfrac{\varepsilon^2}{3}=\delta$

ដោយ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\dfrac{\varepsilon^2}{3}>0$ ដែល $|x-2|<\delta$

នាំអោយ $|f(x)-L|<\varepsilon$ រឺ $\left|\sqrt{(x-2)(x-3)}-0\right|<\varepsilon$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{(x-2)(x-3)}=0}$

គ. $\lim\limits_{x\to x_0}(ax+b)=ax_0+b$

យើងពិនិត្យ:

-ករណី $a=0$ នោះ $ax+b=b$

$\lim\limits_{x\to x_0}(ax+b)=\lim\limits_{x\to x_0}b=b$

ដូចនេះ ចំពោះ $a=0$ យើងបាន: $\lim\limits_{x\to x_0}(ax+b)=ax_0+b$ ពិត

-ករណី $a\neq 0$

តាមនិយមន័យ ចំពោះ $\forall\varepsilon>0$ និង $\exists\delta>0$, យើងបាន:

$|f(x)-L|<\varepsilon$ សមមូល $|(ax+b)-(ax_0+b)|<\varepsilon$

សមមូល $|ax+b-ax_0-b|<\varepsilon$

សមមូល $|ax-ax_0|<\varepsilon$

សមមូល $|a||x-x_0|<\varepsilon$

សមមូល $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{|a|}=\delta$

ដោយ $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{|a|}>0$ ដែល $|x-x_0|<\delta$ នាំអោយ $|f(x)-L|<\varepsilon$ រឺ $|(ax-b)-(ax_0+b)|<\varepsilon$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}(ax+b)=ax_0+b}$

២. បើ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=M$ និង $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$ ដែល M និង L ជាចំនួនថេរនោះចូរបង្ហាញថា៖

ក. $\lim\limits_{x\to a}kf(x)=kM$

ខ. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=M\pm L$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim_{x\to a} kf(x) = kM$

យើងពិនិត្យ ៖

-ករណី $k=0$ នោះ $kf(x)=kM$ ចំពោះគ្រប់ x ។

-ករណី $k\neq 0$

ដោយ $\lim_{x\to a} f(x) = M$ ចំពោះគ្រប់ $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល $|f(x)-M| < \frac{\varepsilon}{|k|}$ ចំពោះ $\forall x$ ដែល $|x-a|<\delta$

ដូចនេះ គ្រប់ x ដែល $|x-a|<\delta$ នោះយើងបាន ៖

$|kf(x)-kM| = |k\{f(x)-M\}| = |k||f(x)-M| < |k|.\frac{\varepsilon}{|k|} < \varepsilon$

ដូចនេះគ្រប់ $\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$ ដែល $|kf(x)-kM|<\varepsilon$ ចំពោះគ្រប់ x ដែល $|x-a|<\delta$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to a} kf(x) = kM}$

ខ. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = M \pm L$

ដោយ $\lim_{x\to a} f(x) = M$ និង $\lim_{x\to a} g(x) = L$ តាមនិយមន័យចំពោះគ្រប់ $\varepsilon>0$ មាន $\delta_1>0$ និង $\delta_2>0$

ដែល ៖

$|f(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}$ គ្រប់ x ដែល $|x-a|<\delta_1$

$|g(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}$ គ្រប់ x ដែល $|x-a|<\delta_1$

ម៉្យាងទៀត

$$\left|\left[f(x)\pm g(x)\right]-(M\pm L)\right| = \left|\left[f(x)-M\right]\pm\left[g(x)-L\right]\right|$$
$$\leq |f(x)-M| + |g(x)-L|$$

ដូចនេះបើគេយក δ ដែល $\delta<\delta_1$ និង $\delta<\delta_2$ នោះគ្រប់ x ដែល $|x-a|<\delta$ យើងបាន

$$\left|\left[f(x)\pm g(x)\right]-(M\pm L)\right| \leq |f(x)-M| + |g(x)-L|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ដូចនេះគ្រប់ $\alpha>0$ មាន $\delta>0$ ដែល $\left|\left[f(x)\pm g(x)\right]-(M\pm L)\right|<\varepsilon$ គ្រប់ x ដែល $|x-a|<\delta$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = M\pm L}$

៣- គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

ខ- $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}$

គ- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+x}{|x|}$

ឃ- $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)$

ដំណោះស្រាយ

ក- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2-x+1}-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x+1-1)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{(1+x-1+x)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2-x\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2x\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

$$=\frac{-1(1+1)}{2(1+1)}=-\frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=-\dfrac{1}{2}}$

ខ- $$\lim_{x\to +\infty}\frac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)x\left(2+\frac{3}{x}\right)x\left(\frac{2}{x}-1\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x\left(2+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{3}{x}\right)\left(\frac{2}{x}-1\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{3}{x}\right)\left(\frac{2}{x}-1\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{(1-0)(2+0)(0-1)}{(1+0)(2+0)}=-\frac{2}{2}=-1$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}=-1}$

គ- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+x}{-x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x+1)}{-x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+1}{-1}=-1$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+x}{|x|}=-1}$

ឃ- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3})\left(\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}\right)}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+8x-1-x^2+3}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x+2}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(8+\dfrac{2}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\dfrac{8}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(8+\dfrac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{8}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{\left(8+\dfrac{2}{x}\right)}{\left(\sqrt{1+\dfrac{8}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}\right)}$

$=-\dfrac{8+0}{\sqrt{1+0-0}-\sqrt{1-0}}=-\dfrac{8}{2}=-4$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)=-4}$

៤. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនថេរ a ដើម្បីអោយលីមីតខាងក្រោមជាលីមីតនៃចំនួនថេរហើយកំណត់លីមីតនេះផង។

ក- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}$ ខ- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}+a}{x}$

គ- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+a}-1}{x-2}$ ឃ- $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+ax}-1}{x^2-1}$

ដំណោះស្រាយ

ក- $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}$

ដោយ $\lim_{x\to1}(x-1)=0$ នោះដើម្បីអោយលមីតនេះជាចំនួនថេរលុះត្រាតែ $\lim_{x\to1}\left(\sqrt{x+3}-a\right)=0$

នាំអោយ $\sqrt{4}-a=0$ នាំអោយ $\boxed{a=2}$

កំណត់ $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}$ ចំពោះ $a=2$

គេបាន៖ $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+3}+2}=\frac{1}{4}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{1}{4}}$

ខ- $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x}+a}{x}$

ដោយ $\lim_{x\to0}x=0$ នោះដើម្បីអោយលីមីតនេះជាចំនួនថេរលុះត្រាតែ $\lim_{x\to0}\left(\sqrt{1+3x}+a\right)=0$

នាំអោយ $\sqrt{1}+a=0$ នាំអោយ $\boxed{a=-1}$

កំណត់ $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x}-a}{x}$ ចំពោះ $a=-1$

គេបាន៖ $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+3x}-1\right)\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3x}{x\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3}{\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}=\frac{3}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{3}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}=\frac{3}{2}}$

គ- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+a}-1}{x-2}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ នោះដើម្បីអោយលីមីតនេះជាចំនួនថេរលុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x+a}-1\right)=0$

នាំអោយ $\sqrt{2+a}-1=0$ នាំអោយ $\boxed{a=-1}$

កំណត់ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+a}-1}{x-2}$ ចំពោះ $a=-1$

គេបាន៖ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-1-1}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\dfrac{1}{2}}$

ឃ- $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+ax}-1}{x^2-1}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-1)=0$ នោះដើម្បីអោយលីមីតនេះជាចំនួនថេរលុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt{x^2+ax}-1\right)=0$

នាំអោយ $\sqrt{1-a}-1=0$ នាំអោយ $\boxed{a=0}$

កំណត់ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+ax}-1}{x^2-1}$ ចំពោះ $a=0$

គេបាន៖ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2}-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x|-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-1}{(x-1)}=\dfrac{-1}{-1-1}=\dfrac{1}{2}$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2}-1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}}$

៥. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\sin^2 5x}$

ខ- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}$

គ- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

ឃ- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$

ង- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\sin\frac{1}{x}$

ច- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$

ដំណោះស្រាយ

ក- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 5x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{(5x)^2}{\sin^2 5x}\times\frac{3}{25} = \frac{3}{25}$$

ខ- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}-\sin^3 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\frac{\sin^3 x-\sin^3 x\cos^3 x}{\cos^3 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2\cos^3 x}{\sin^3 x(1-\cos^3 x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2\cos^3 x}{\sin^3 x(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos^3 x}{\sin^3 x(1+\cos x+\cos^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\cos^3 x}{\sin^3 x(1+\cos x+\cos^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{x^3}{\sin^3 x}\times\frac{1}{4x}\times\frac{\cos^3 x}{(1+\cos x+\cos^2 x)}\right] = \pm\infty$$

គ- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x})(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}{(1-\cos^2 x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

ឃ- $\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

តាង $t=\frac{\pi}{2}-x$ នោះ $x=\frac{\pi}{2}-t$, បើ $x\to\frac{\pi}{2}$ នោះ $t\to 0$

គេបាន៖

$$\lim_{x\to\frac{\Pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

ង- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\sin\frac{1}{x}$

តាង n = $\frac{1}{x}$ នោះx = $\frac{1}{n}$, បើ $x\to\pm\infty$ នោះ $n\to 0$

គេបាន៖ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\sin\frac{1}{x}$ = $\lim\limits_{n\to 0}\frac{\sin n}{n}$ = 1

ច- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$

តាង n = $\frac{1}{x}$ នោះx = $\frac{1}{n}$, បើ $x\to+\infty$ នោះ $n\to 0$

គេបាន៖

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{n\to 0}\frac{1-\cos n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

៦. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^2+xe^x\right)$

ខ- $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^x$

គ- $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x}$

ឃ- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-x}{2e^x+1}$

ង- $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

ច- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\ln\left(x^2+1\right)$

ឆ- $\lim\limits_{x\to-4} x\ln\left(4-3x-x^2\right)$ ជ- $\lim\limits_{x\to+\infty}\{x[\ln((x+1)-\ln x)]\}$

ដំណោះស្រាយ

ក- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^2+xe^x\right)$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2+xe^x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}x^2\left(1+\frac{e^x}{x}\right) = +\infty \quad \text{ព្រោះ } \left(\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0\right)$$

ខ- $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^x$

$$\lim_{x\to+\infty}(1-x)e^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)xe^x = -\infty$$

គ- $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x}$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right) = 0$$

ឃ- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-x}{2e^x+1}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-x}{2e^x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(2+\frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{x}{e^x}\right)}{\left(2+\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1}{2}$$

ង- $\lim\limits_{x\to0}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$$\lim_{x\to0}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x\to0}\left[\ln x-\ln(x+1)\right] = -\infty - 1 = -\infty$$

ច- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\ln\left(x^2+1\right)$

- បើ $x\to+\infty$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(x^2+1\right) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$
- បើ $x\to-\infty$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(x^2+1\right) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

ឆ- $\lim\limits_{x\to-4}x\ln\left(4-3x-x^2\right)$

$$\lim_{x\to-4}x\ln\left(4-3x-x^2\right) = -4\ln 0 = (-4)(-\infty) = +\infty$$

ជ- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{x\left[\ln\left((x+1)-\ln x\right)\right]\right\}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{x\left[\ln\left((x+1)-\ln x\right)\right]\right\} = \lim_{x\to+\infty}\left\{x\left[\ln\left(x[\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{\ln x}{x}]\right)\right]\right\} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

៧. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

ខ. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2\cos x}$$

$$=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}=\frac{0+1}{0-1}=-1$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}=-1}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x\left(1-\sqrt{\cos 2x}\right)}{x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}+\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{x^2\left(1+\sqrt{\cos 2x}\right)}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2}+\frac{\cos x\left(2\sin^2 x\right)}{x^2\left(1+\sqrt{\cos 2x}\right)}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{2\cos x}{\left(1+\sqrt{\cos 2x}\right)}\right)\\
&= 1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{2}{2}=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

។ ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\dfrac{3}{2}}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\cos 2x}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}\right]\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x\left(2\sin^2 x\right)}{x^2}\right]\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}\right]=\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}=\dfrac{5}{2}}$

៨. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(a-b)}{\sin ax-\sin bx}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$

ង. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}-1\right)$ ច. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left[\dfrac{2\sin^2 x-2\sin x-\sin x+1}{(2\sin x+1)(2\sin x-1)}\right]$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x(\sin x-1)-(\sin x-1)}{(2\sin x-1)(2\sin x+1)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(\sin x-1)(2\sin x-1)}{(2\sin x-1)(2\sin x+1)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(\sin x-1)}{(2\sin x+1)}$$

$= \dfrac{\frac{1}{2}-1}{2\left(\frac{1}{2}\right)+1} = -\dfrac{1}{4}$ ។ ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1}=-\dfrac{1}{4}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+x\sin x}{\sin^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x+x\sin x}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(2\sin x+x)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(2+\frac{x}{\sin x}\right) = 2+1=3$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}=3}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(a-b)}{\sin ax-\sin bx}\ (a\neq 0, b\neq 0, a\neq b)$

គេបាន៖

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(a-b)}{\sin ax-\sin bx} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(a-b)}{ax\times\frac{\sin ax}{ax}-bx\times\frac{\sin bx}{bx}}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(a-b)}{a\times\frac{\sin ax}{ax}-b\times\frac{\sin bx}{bx}} = \frac{a-b}{a-b}=1$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x(a-b)}{\sin ax-\sin bx}=1}$

ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{\left(\sqrt{1+x\sin x}-\cos x\right)\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{1+x\sin x-\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{1-\cos^2 x+x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{\sin^2 x+x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{\sin x+x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{\frac{\sin x}{x}+1}=\frac{1(1+1)}{1+1}=\frac{2}{2}=1$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}=1}$

ង. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}-1\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}-1\right)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-\left(x^2+1-2\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2+2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{2}{x}+2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3-\frac{2}{x}+2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{3-0+2\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}-0}=\frac{5}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}-1\right)=\frac{5}{2}}$

ច. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x+2-2}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times 3\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)=1\times 3\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)=6\sqrt{2}$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=6\sqrt{2}}$

៩. កំណត់អនុគមន៍ដឺក្រេទី២ $y=f(x)$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌលីមីតទាំងពីរខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=1$ ខ. $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-1$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖ $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0, a,b,c\in R$

ក. $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=1$ ឬ $\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-1}=1$

ឬ $\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2}{x^2}=1$

ឬ $\lim_{x\to+\infty}a=1$ នាំអោយ a = 1

បើ a = 1 នាំអោយ $f(x)=x^2+bx+c$

ម៉្យាងទៀត

ខ. $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-1$ ឬ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+bx+c}{x^2-1}=-1$

ឬ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+bx-b+c+b+1}{x^2-1}=-1$

ឬ $\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)+b(x-1)+c+b+1}{x^2-1}=-1$

ឬ $\lim_{x\to 1}\left[1+\frac{b}{x+1}+\frac{b+c+1}{x^2-1}\right]=-1$

នាំអោយ $\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{b}{x+1}\right]=-1$ និង $\lim_{x\to+\infty}\frac{b+c+1}{x^2-1}=0$

- ចំពោះ $\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{b}{x+1}\right]=-1$ នាំអោយ $1+\frac{b}{1+1}=-1$ នាំអោយ b = - 4

➢ ចំពោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b+c+1}{x^2-1}=0$ នាំអោយ $b+c+1=0$ នាំអោយ $c=-b-1=3$

ដូច្នេះ $\boxed{f(x)=x^2-4x+3}$

១០. គេមានពហុកោណនិយ័តចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមាន n ជ្រុងនិងកាំស្មើនឹង a ។ តាង S_n ជាផ្ទៃក្រឡានៃពហុកោណនេះ។ គណនា S_n រួចកំណត់តម្លៃ $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន n ជាចំនួនជ្រុងនៃពហុកោណនិយ័តចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមានកាំស្មើនឹង a និងពហុកោណមាន n ត្រីកោណសមបាតប៉ុនៗគ្នាដែលមានជ្រុងពីរស្មើគ្នាស្មើនឹង a ហើយត្រីកោណនីមួយៗមានមុំមួយជាមុំផ្ចិតមានរង្វាស់ស្មើនឹង $\frac{2\pi}{n}$

គេបានផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណនីមួយៗគឺ $S=\frac{1}{2}\times a\times a\times\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{a^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$

នាំអោយ $S_n=\frac{a^2}{2}n\sin\frac{2\pi}{n}$ ។

➢ កំណត់តម្លៃ $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$

គេបាន៖

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{a^2}{2}n\sin\frac{2\pi}{n}$$

តាង $x=\frac{1}{n}$ នោះ $n=\frac{1}{x}$, បើ $n\to+\infty$ នោះ $x\to 0$

នាំអោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^2}{2}n\sin\frac{2\pi}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^2}{2}\times\frac{1}{x}\sin 2\pi x$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{a^2}{2}\times\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}\times 2\pi = \pi a^2$$

មេរៀនទី២. ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ដំណោះស្រាយលំហាត់

១.បញ្ជាក់ថាតើអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់ត្រងតម្លៃ x ដែលឲ្យឬទេ?

ក. $f(x)=5x^2-6x+1, x=2$

ខ. $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}, x=1$

គ. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}, x=4$

ឃ. $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}; x=-2$

ង. $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 2 \\ 2 & x>2 \end{cases}, x=2$

ច. $f(x)\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & x<-1 \\ x^2-3 & x\ge -1 \end{cases}; x=-1$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=5x^2-6x+1, x=2$

ដោយ f កំណត់ចំពោះ $x=2$ ហើយ $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=9$. ដូច្នេះ f ជាប់ត្រង់ $x=2$

ខ. $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}, x=1$

ដោយ f កំណត់ចំពោះ $x=1$ ហើយ $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{3}{2}$ ។

ដូច្នេះ f ជាប់ត្រង់ $x=1$

គ. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}, x=4$

ដោយ f មិនកំណត់ចំពោះ $x=4$ ។ដូច្នេះ f ដាច់ត្រង់ $x=4$

ឃ. $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}; x=-2$

ដោយ f មិនកំណត់ចំពោះ $x=-2$ ។ដូច្នេះ f ដាច់ត្រង់ $x=-2$

ង. $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 2 \\ 2 & x>2 \end{cases}, x=2$

ដោយ $f(2)=2+1=3$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+1)=3$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2)=2$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

ដូច្នេះ f ដាច់ត្រង់ $x=2$ តែ f ជាប់ខាងឆ្វេងត្រង់ $x=2$

ច. $f(x)\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & x<-1 \\ x^2-3 & x\geq -1\end{cases}; x=-1$

ដោយ $f(-1)=1-3=-2$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{x^2-1}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x-1)=-1-1=-2$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^2-3\right)=1-3=-2$

យើងមាន $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

ដូច្នេះ f ជាប់ត្រង់ $x=-1$

២.រកតម្លៃ x ដែលធ្វើអោយអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ដាច់

ក. $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x-6}$ ខ. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4x-5}$

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x-2}$ ឃ. $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-3x-18}$

ង. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+1 & ,x\leq 2 \\ 3-x & ,x>2\end{cases}$ ច. $f(x)=\begin{cases}-x+1 & ,x\leq -1 \\ 2 & ,-1<x<1 \\ -x+3 & ,x>1\end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x-6}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $2x-6=0\Rightarrow x=3$

មានន័យថា f មិនកំណត់ត្រង់ $x=3$

ដូចនេះ f ដាច់ត្រង់ $x=3$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4x-5}$

យើងមាន $x^2+4x-5=0\Leftrightarrow x=1; x=-5$ ។

មានន័យថា f មិនកំណត់ត្រង់ $x=1; x=-5$

ដូចនេះ f ដាច់ត្រង់ $x=1; x=-5$

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x-2}$

យើងបាន $x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=-1; x=2$ ។

មានន័យថា f មិនកំណត់ត្រង់ $x=-1; x=2$

ដូចនេះ f ដាច់ត្រង់ $x=-1; x=2$

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-3x-18}$

យើងបាន $x^2-3x-18=0 \Leftrightarrow x=-3; x=6$ ។

មានន័យថា f មិនកំណត់ត្រង់ $x=-3; x=6$

ដូចនេះ f ដាច់ត្រង់ $x=-3; x=6$

ង. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1 & ,x\le 2 \\ 3-x & ,x>2 \end{cases}$

ដោយ $f(2)=\dfrac{2}{2}+1=2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x}{2}+1\right)=2; \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3-x)=1$ ។

ដូចនេះ f ជាប់ត្រង់ $x=2$

ច. $f(x)=\begin{cases} -x+1 & ,x\le -1 \\ 2 & ,-1<x<1 \\ -x+3 & ,x>1 \end{cases}$

ចំពោះ $x=-1$ យើងបាន

$f(-1)=1+1=2; \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=2; \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=2$

នាំអោយ f ជាប់ត្រង់ $x=-1$

ចំពោះ $x=1$

f មិនកំណត់ត្រង់ $x=1 \Rightarrow f$ ដាច់ត្រង់ $x=1$ ។

៣.សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោមលើចន្លោះដែលឲ្យ

ក. $f(x)=\dfrac{x-3}{4+x}$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $[-4,1]$

ខ. $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $[0,1]$

គ. $f(x)=\begin{cases} x(x-1) & ,\ x\le 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & ,\ x\ge 3 \end{cases}$ លើចន្លោះ $(0,3)$ និង $[0,3]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x-3}{4+x}$ ជាប់លើចន្លោះ $(0,1)$ ព្រោះ $f(x)$ មិនកំណត់តែត្រង់ $x=-4$

ខ. $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ ជាប់លើចន្លោះ $(0,1)$ ព្រោះ $f(x)$ មិនកំណត់តែត្រង់ $x=0$

គ. $f(x)=\begin{cases} x(x-1) & , x\le 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & , x>3 \end{cases}$

សិក្សាភាពជាប់ត្រង់ $x=3$

$f(3)=3(3-1)=6$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x(x-1)=6$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}(x+3)=6$

យើងឃើញថា $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)=6$

នោះ f ជាប់ត្រង់ $x=3$

សន្និដ្ឋាន៖ f ជាប់លើចន្លោះ $[0,3]$

៩.រកតម្លៃ A ដែលធ្វើអោយអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ x

ក. $f(x)=\begin{cases} Ax-3 & , x<2 \\ 3-x+2x^2 & , x\ge 2 \end{cases}$ ខ. $f(x)=\begin{cases} 1-3x & , x<4 \\ Ax^2+2x-3 & , x\ge 4 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

៩.រកតម្លៃ A ដែលធ្វើអោយអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ x

ក. $f(x)=\begin{cases} Ax-3 & , x<2 \\ 3-x+2x^2 & , x\ge 2 \end{cases}$

ដោយ $f(2)=3-2+8=9; \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=9; \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2A-3$

យើងមាន $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លុះត្រាតែ $2A-3=9 \Leftrightarrow A=6$ ។ដូចនេះ $A=6$

ខ. $f(x)=\begin{cases} 1-3x & , x<4 \\ Ax^2+2x-3 & , x\ge 4 \end{cases}$

ដោយ $f(4)=16A+8-3=16A+5; \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=-11; \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=16A+5$

យើងបាន $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លុះត្រាតែ $16A+5=-11 \Rightarrow A=-1$ ។

ដូចនេះ $A=-1$ ។

៥. រកតម្លៃ A និង B ដែលធ្វើអោយអនុគមន៍កំណត់ដោយ

$$f(x)=\begin{cases}Ax^2+5x-9, x<1\\ B, x=1\\ (3-x)(A-2x), x>1\end{cases}$$ ជាប់ត្រង់គ្រប់តម្លៃ x ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖

$$f(x)=\begin{cases}Ax^2+5x-9, x<1\\ B, x=1\\ (3-x)(A-2x), x>1\end{cases}$$

ដើម្បីអោយ f ជាប់គ្រប់តម្លៃយើងគ្រាន់តែអោយ f ជាប់ត្រង់ 1

f ជាប់ត្រង់ 1 កាលណា

$f(1)$ កំណត់បាន

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)= f(1)$$

គេបាន៖

$+\ \ f(1) = B$

$$+\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(Ax^2+5x-9\right)=A-4$$

$$+\lim_{x\to1^{+-}} f(x)=\lim_{x\to1^+}(3-x)(A-2x)=2(A-2)=2A-4$$

នាំអោយ $B=A-4=2A-4$

គេបាន៖

$$\begin{cases}B=A-4\\ A-4=2A-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\ B=-4\end{cases}$$

ដូច្នេះ $\boxed{A = 0, B = -4}$

៦.ក្នុងបណ្តាអនុគមន៍ខាងក្រោមតើ f អាចមានបន្លាយតាមភាពជាប់ត្រង់ a ឬទេ?

ក. $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$, $a=3$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$, $a=2$

គ. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$, $a=1$

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-3x+4}$, $a=4$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$

ដោយ f មិនកំណត់ត្រង់ $x=3$ និង $\lim_{x\to 3} f(x)=6$ នាំឲ្យអនុគមន៍ f មានបន្លាយតាមភាពជាប់ត្រង់ $x=3$

យក g ជាអនុគមន៍បន្លាយនៃអនុគមន៍ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x=3$ គេបាន g ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ ៖

$$g(x)=\begin{cases} f(x), x\neq 3 \\ \underset{x\to 3}{Lim}\, f(x), x=3 \end{cases}$$

គេបាន៖

$$\underset{x\to 3}{Lim}\, f(x)=\underset{x\to 3}{Lim}\frac{x^2-9}{x-3}=\underset{x\to 3}{Lim}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\underset{x\to 3}{Lim}(x+3)=3+3=6$$

ដូច្នេះ $g(x)=\begin{cases} f(x), x\neq 3 \\ 6, x=3 \end{cases}$

ខ. $f(x)=\frac{x^2+3x-10}{x-2}$

ដោយ f មិនកំណត់ត្រង់ $x=2$ និង $\lim_{x\to 2} f(x)=7$ នាំឲ្យអនុគមន៍ f មានបន្លាយតាមភាពជាប់ត្រង់ $x=2$

g ជាអនុគមន៍បន្លាយនៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ f គេបាន g ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖

$$g(x)=\begin{cases} f(x), x\neq 2 \\ \underset{x\to 2}{Lim}\, f(x), x=2 \end{cases}$$

គេបាន៖

$$\underset{x\to 2}{Lim}\, f(x)=\underset{x\to 2}{Lim}\frac{x^2+3x-10}{x-2}=\underset{x\to 2}{Lim}\frac{(x-2)(x+5)}{x-2}=\underset{x\to 2}{Lim}(x+5)=2+5=7$$

ដូច្នេះ $g(x)=\begin{cases} f(x), x\neq 2 \\ 7, x=2 \end{cases}$

គ. $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$

ដោយ f មិនកំណត់ត្រង់ $x=1$ និង $\lim_{x\to 1} f(x)=3$ នាំឲ្យអនុគមន៍ f មានបន្លាយតាមភាពជាប់ត្រង់ 1

យក g ជាអនុគមន៍បន្លាយនៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់1

គេបាន g ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖

$$g(x)=\begin{cases} f(x), x\neq 1 \\ \underset{x\to 1}{Lim}\, f(x), x=1 \end{cases}$$

គេបាន៖

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=1+1+1=3$$

ដូច្នេះ $g(x)=\begin{cases} f(x), x\neq 1 \\ 3, x=1\end{cases}$

ឃ.ដោយ $f(4)=0$ កំណត់បាន និង $\lim_{x\to4} f(x)=\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x^2-3x+4}=\frac{0}{8}=0$

ហើយ $\lim_{x\to4} f(x)=f(4)=0$ នាំអោយ f ជាប់ត្រង់ $x=4$ ។

ដូច្នេះគ្មានអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាបត្រង់ $x=4$ ទេ។

៧. ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលបង្ហាញថាអនុគមន៍ខាងក្រោមមានចំនួន c ក្នុងចន្លោះដែលអោយ

ក. $f(x)=x^2+x-1,[0,5], f(c)=11$ ខ. $f(x)=x^2-6x+8,[0,3], f(c)=0$

គ. $f(x)=x^3-x^2+x-2,[0,3], f(c)=4$ ឃ. $f(x)=\frac{x^2+x}{x-1},\left[\frac{5}{2},4\right], f(c)=6$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=x^2+x-1,[0,5], f(c)=11$

ដោយ $f(0)=-1\,\&\, f(5)=25+5-1=29$ យើងបាន $f(0)<f(c)<f(5)$

ដូចនេះ $f(c)=11$ មានឬសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $[0;5]$

ខ. $f(x)=x^2-6x+8,[0,3], f(c)=0$

ដោយ $f(0)=8; f(3)=9-18+8=-1$ យើងបាន $f(3)<f(c)<f(0)$

ដូចនេះ $f(c)=0$ មានឬសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $[0;3]$

គ. $f(x)=x^3-x^2+x-2,[0,3], f(c)=4$

ដោយ $f(0)=-2; f(3)=27-9+3-2=19$ យើងបាន $f(0)<f(c)<f(3)$

ដូចនេះ $f(c)=4$ មានឬសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $[0;3]$

ឃ. $f(x)=\frac{x^2+x}{x-1},\left[\frac{5}{2},4\right], f(c)=6$

ដោយ $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{\frac{25}{4}+\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}-1}=\frac{35}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{35}{6}$

$f(4)=\frac{16+4}{4-1}=\frac{20}{3}$ យើងបាន $f\left(\frac{5}{2}\right)<f(x)<f(4)$

ដូចនេះ $f(c)=6$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $\left[\frac{5}{2};4\right]$ ។

៨. ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលរកតម្លៃ c បើគេស្គាល់តម្លៃ k

ក. $f(x)=2+x-x^2;[0;3];k=1$

ខ. $f(x)=\sqrt{25-x^2};[-4.5;3];k=3$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=2+x-x^2;[0;3];k=1$

ពិនិត្យ៖ $f(0)=2; f(3)=-4$

$1\in[-4;2]=[f(3);f(0)]$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល $\exists c\in[0;3]$ ដែល $f(c)=1$ ។

កំណត់តម្លៃ c ៖

$2+c-c^2=1$ ឬ $c^2-c-1=0$

$(c-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}=0$

$(c-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})(c-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})=0$

$c\in[0;3]$ នោះ $c-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\neq 0$ នាំអោយ $c=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ខ. $f(x)=\sqrt{25-x^2};[-4.5;3];k=3$

ពិនិត្យ៖ $f(-4.5)=\sqrt{25-20.25}=\sqrt{4.75}; f(3)=\sqrt{25-9}=4$

$3\in[\sqrt{4.75};4]=[f(-4.5);f(3)]$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល $\exists c\in[-4.5;3]$ ដែល $f(c)=3$ ។

កំណត់តម្លៃ c ៖

$\sqrt{25-c^2}=3$ ឬ $25-c^2=9$

នោះ $c=-4$ ព្រោះ $c\in[-4.5;3]$

៩.ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $x\tan x=\cos x$ យ៉ាងហោចមានឫសពិតមួយនៅចន្លោះ $[0;\frac{\pi}{4}]$ ។

ខ.ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $(x^n-1)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1=0$ យ៉ាងហោចមានឫសពិតមួយចន្លោះ $(0;1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $x\tan x = \cos x$ យ៉ាងហោចមានឬសពិតមួយនៅចន្លោះ$[0;\frac{\pi}{4}]$ ។

តាងអនុគមន៍ $f(x) = x\tan x - \cos x$

នោះយើងឃើញថា $f(0) = -1;\ f[\frac{\pi}{4}] = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4}$

$.\ \pi > 3 \Rightarrow \pi^2 > 9 > 8$

$\pi > \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\pi - 2\sqrt{2} > 0$

$.\ 0 \in [-1;\frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4}] = [f(0);\ f(\frac{\pi}{4})]$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល $\exists c \in [0;\frac{\pi}{4}]$ ដែល $f(c) = 0$

ដូចនេះយ៉ាងហោចណាស់មាន c ជាឬសសមីការ $x\tan x = \cos x$

ខ.ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $(x^n - 1)\cos x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$ យ៉ាងហោចមានឬសពិតមួយចន្លោះ $(0;1)$ ។

តាងអនុគមន៍ $f(x) = (x^n - 1)\cos x + \sqrt{2}\sin x - 1$

អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[0;1]$

យើងពិនិត្យ ៖ $f(0) = -2;\ f(1) = \sqrt{2}\sin 1 - 1$

$\pi < 4$ ឬ $1 > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin 1 > \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{2}\sin 1 > 1$ ឬ $\sqrt{2}\sin 1 - 1 > 0$

$f(1) > 0$ នោះ $0 \in [-2;\sqrt{2}\sin 1 - 1] = [f(0);\ f(1)]$

តានទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលមាន $c \in [0;1]$ ដែល $f(c) = 0$

ម្យ៉ាងទៀត $f(0) = -2 \neq 0$ និង $f(1) = \sqrt{2}\sin 1 - 1 \neq 0$ នោះ $c \neq 0$ និង $c \neq 1$ នោះ $c \in (0;1)$ ។

ដូចនេះសមីការ $(x^n - 1)\cos x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$ យ៉ាងហោចមានឬសពិតមួយនៅចន្លោះបើក $(0;1)$ ។

ដំណោះស្រាយលំហាត់ជំពូក

១. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{4x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3}]$ ខ. $\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3}]$

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x\sin x}{x-\sin^2 x}$ ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{4x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3}]$ រាងមិនកំណត់ $(\infty-\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{4x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3}] = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x+2-(x^2-x+3)}{\sqrt{4x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+3}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}} = +\infty$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{4x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3}]=+\infty$ ។

ខ. $\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3}]$ រាងមិនកំណត់ $(\infty-\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3}] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+2-(x^2-x+3)}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+3}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x[\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$
$$= \frac{2}{1+1} = 1$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3}]=1$

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x\sin x}{x-\sin^2 x}$ រាងមិនកំណត់ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x\sin x}{x-\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x-\sin x)}{x(1-\frac{\sin^2 x}{x})}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{1-\frac{\sin^2 x}{x}} = \frac{0-0}{1-1(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x\sin x}{x-\sin^2 x}=0$

ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ រាងមិនកំណត់ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{2\sin^2 x/2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{2}\left|\sin x/2\right|}$$

+ បើ $x\to 0^+$ នោះ $\left|\sin x/2\right|=\sin x/2$ គេបាន

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{2}\left|\sin x/2\right|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-2\sin x/2\cos x/2}{\sqrt{2}\sin x/2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\sqrt{2}\sin x/2}-\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x/2\cos x/2}{\sqrt{2}\sin x/2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{4(x/2)}{\sqrt{2}\left|\sin x/2\right|}-\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\sqrt{2}}\cos x/2$$

$$=2\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

+បើ $x\to 0^-$ នោះ $\left|\sin x/2\right|=-\sin x/2$ គេបាន

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{2}\left|\sin x/2\right|}=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{4(x/2)}{-\sqrt{2}\sin x/2}+\frac{2\sin x/2\cos x/2}{\sqrt{2}\sin x/2}\right]$$

$$=-2\sqrt{2}+\sqrt{2}=-\sqrt{2}$$

សរុបមក $\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\sqrt{2}$ បើ $x\to 0^+$,$=-\sqrt{2}$ បើ $x\to 0^-$

២. កំណត់តម្លៃ a ដែលបំពេញលក្ខខ័ណ្ឌ $\lim_{x\to 0}\frac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x}=\frac{1}{8}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $\lim_{x\to 0}\frac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax)^2-(1+x)}{x[1+ax+\sqrt{1+x}]}=\lim_{x\to 0}\frac{(2a-1)x+a^2x^2}{x[1+ax+\sqrt{1+x}]}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{a^2x+2a-1}{1+ax+\sqrt{1+x}}=\frac{2a-1}{2}$ នោះគេបាន $\frac{2a-1}{2}=\frac{1}{8}$ ឬ $a=\frac{5}{8}$

ដូចនេះ $a=\frac{5}{8}$

៣. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$

ខ. $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ (a>0 និង b<0) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ រាងមិនកំណត់ $\left(\frac{0}{0}\right)$ នោះគេបាន៖

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[n]{x}-1)(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+...+\sqrt[n]{x}+1)(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+...+\sqrt[m]{x}+1)}{(\sqrt[m]{x}-1)(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+...+\sqrt[n]{x}+1)(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+...+\sqrt[m]{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+...+\sqrt[m]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+...+\sqrt{x}+1)}=\frac{1+1+1+...+1}{1+1+1+...+1}=\frac{m}{n}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}=\frac{m}{n}$

ខ. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ (a>0 និង b<0) រាងមិនកំណត់ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{x-b-(a-b)}{(x^2-a^2)(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b})}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x^2-a^2)(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b})}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{(x+a)(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b})}$$

$$=\frac{1}{2a(2\sqrt{a-b})}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a(2\sqrt{a-b})}$

៤. គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)$ កំណត់លើចន្លោះ $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ដែល $\sin x+\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$ បើ $x\neq 0$ និង $f(x)=\sqrt{2}$ បើ $x=0$ ។ តើ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ?

ដំណោះស្រាយ

គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)$ កំណត់លើចន្លោះ $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ដែល $\sin x+\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$ បើ $x\neq 0$ និង $f(x)=\sqrt{2}$ បើ $x=0$

f ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$

+ គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[\sin x+\frac{\sqrt{2}\left|\sin \frac{x}{2}\right|}{\sin x}]=\lim\limits_{x\to 0^+}[\sin x+\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}]$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}[\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{x}{2}}]=\frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $f(0)=\sqrt{2}$

នោះ $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq f(0)$

ដូចនេះអនុគមន៍ f មិនជាប់ត្រង់ $x=0$ ទេ។

៥. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីអោយអនុគមន៍ខាងក្រោម ជាប់លើ $\mathbb{R}$

ក. $f(x) = -2x+a$ បើ $x \le 1$ និង $f(x) = \log_3 x$ បើ $x>1$

ខ. $f(x) = a$ បើ $x \le 0$ និង $f(x) = x\sin \frac{1}{x}$ បើ $x>0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គេគ្រាន់តែបង្ហាញថា f ជាប់ត្រង់ $x=1$ ចំពោះតម្លៃ a ណាមួយ

មានន័យថា គេរក a ដើម្បីអោយ f ជាប់ត្រង់ $x=1$

+ គេបាន $f(1)=-2+a$ និង $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-2x+a) = -2+a$

+ ហើយ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \log_3 x = 0$

ដូចនេះ f ជាប់ត្រង់ $x=1$ លុះត្រាតែ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

នោះគេបាន $-2+a=0$ ឬ $a=2$ ។

ខ. គេកំណត់ a ដើម្បីឲ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=0$

+ គេបាន $f(0)=a$ និង $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} a = a$

+ ហើយ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x\sin \frac{1}{x} = 0$ (ព្រោះ $\sin \frac{1}{x}$ ទាល)

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ គេបាន $a=0$ ។

៦. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការខាងក្រោមមានឬសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះដែលឲ្យ

ក. $\sin x = x-1$, $(0,\pi)$ ខ. $20\log_{10} x - x = 0$, $(1,10)$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\sin x = x-1$, $(0,\pi)$ តាង $f(x)=\sin x - x + 1$ នោះ $f(0)=\sin 0 - 0 + 1 = 1$

និង $f(\pi) = \sin\pi - \pi + 1 = 1-\pi \prec 0$ នោះ $f(0)\times f(\pi) = 1-\pi \prec 0$

ដោយ f ជាប់លើ $[0,\pi]$ នោះ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល គេបាន

$\exists c \in [0,\pi]$ យ៉ាងតិចមួយ ដែល $f(c)=0$ $f(0)\neq 0 \,\&\, f(\pi)\neq 0 \Rightarrow c\in(0,\pi)$ ។

ខ. $20\log_{10} x - x = 0$, $(1,10)$

តាង $g(x) = 20\log_{10} x - x$ នោះ $g(0) = 20\times 0 - 1 = -1 \prec 0$

$g(10) = 20\log_{10} 10 - 10 = 10$ គេបាន $g(1)\times g(10) = -10 \prec 0$

ហើយ $g(x)$ ជាប់លើ $[1,10]$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល គេបាន

$\exists c\in[1,10]$ យ៉ាងតិចមួយ ដែល $g(c)=0$ $g(1)\neq 0\,\&\,g(10)\neq 0\Rightarrow c\in(1,10)$ ។

៧. គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ មានលេខមេគុណ a,b,c បំពេញលក្ខខ័ណ្ឌ $2a+3b+6c=0$ ។ បង្ហាញថា សមីការនេះមានឬសយ៉ាងតិចមួយ នៅចន្លោះ $\left[0;\frac{2}{3}\right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f(x)=ax^2+bx+c$ គេបាន $f(0)=c$ និង

$$f(⅔)=a(⅔)^2+b(⅔)+c=\frac{1}{9}[2(2a+3b+6c)-3c]=\frac{1}{9}[2\times 0-3c]=-\frac{c}{3}$$

នោះ $f(0)\times f(⅔)=c(-\frac{c}{3})=-\frac{c^2}{3}\leq 0$

ហើយ ដោយ f ជាប់លើ $\left[0,\frac{2}{3}\right]$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល នោះ $\exists c\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$ យ៉ាងតិចមួយ ដែល $f(c)=0$ ។

៨. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ បើ $x\neq 0,\quad f(x)=\frac{|x|+2x^2}{x}$, បើ $x=0,\quad f(0)=1$

ក. តើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ?

ខ. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គេមាន $f(0)=1$ និង $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|+2x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+2x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}(1+2x)=1$

+ ហើយ $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x+2x^2}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-1+2x)=-1$

គេឃើញថា $\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=1$ តែ $\lim_{x\to 0^-}f(x)=-1\neq f(0)$

ដូចនេះ f មិនជាប់ត្រង់ $x=0$ ទេ ។

ខ. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f

$f(x)=2x+1$ បើ $x>0$,

$f(x)=1$ បើ $x=0$,

$f(x)=2x-1$ បើ $x<0$ ។